PRENTICE PRACTICA

Circuitos Eléctricos

Problemas y ejercicios resueltos

Julio Usaola García
Mª Ángeles Moreno López de Saá

Prentice Hall

CONTENIDO

PRÓLOGO

La Teoría de Circuitos es una disciplina básica y muy extensa que puede alcanzar grandes niveles de complejidad, y que tiene aplicaciones en numerosas áreas de conocimiento dentro del extenso campo de la electricidad en la ingeniería. En este libro se incluyen problemas de Teoría de Circuitos con una orientación particular, enfocada hacia aplicaciones del área de conocimiento de Ingeniería Eléctrica, y en particular hacia estudios encuadrados en titulaciones de Ingeniería Industrial e Ingeniería Técnica Industrial, aunque muchos de los problemas pueden ser utilizados en asignaturas de Teoría de Circuitos de otras titulaciones. La extensión de los problemas y el nivel de los mismos están adecuados a una asignatura cuatrimestral de unas 60 horas de carga lectiva, y puede ser el primer contacto de un estudiante con los temas aquí tratados. Es necesario, no obstante, que el lector tenga conocimientos de álgebra y cálculo, y que esté familiarizado con operaciones de números complejos. Es, por tanto, un libro de uso general en este campo.

El libro se estructura en cuatro capítulos, que se comentan a continuación:

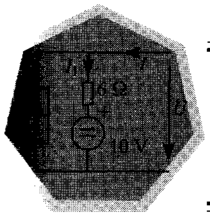
- El primero incluye las definiciones de los elementos de los circuitos, y las leyes y métodos básicos para su resolución. Estos conceptos se aplican a circuitos resistivos lineales con fuentes de tensión y corriente continuas, dependientes e independientes.
- El segundo capítulo aplica estos métodos de resolución a circuitos de alterna, o circuitos en régimen estacionario sinusoidal, en la mayor parte de los casos alimentados a frecuencia industrial, esto es, 50 Hz. Se utiliza el método de fasores para resolver estos problemas, para lo cual se presentan numerosos ejercicios basados en el diagrama vectorial. En bastantes problemas, además, se insiste en el uso de especificaciones de potencia activa, reactiva y aparente, de gran interés en la práctica, así como en la medida de estas magnitudes.
- En el tercer capítulo se tratan los sistemas trifásicos equilibrados, en el que se extienden las ideas básicas presentadas en el primer capítulo a este tipo de sistemas, de tan extendida aplicación en la práctica. También aquí se insiste en las especificaciones de potencia activa, reactiva y aparente, y en los distintos métodos de su medida en laboratorio. En algunos ejercicios se estudia el efecto de algunos desequilibrios en un circuito, sin entrar en el análisis sistemático de los sistemas desequilibrados.
- En el último capítulo se presentan problemas relativos a transitorios de primer orden, esto es, de transitorios en circuitos en los que hay solamente un elemento dinámico, siendo los restantes elementos fuentes (de continua o de alterna) o resistencias. En el tratamiento de estos transitorios se ha procurado evitar el uso de transformadas integra-

les, así como la resolución sistemática de las ecuaciones diferenciales del sistema, con el fin de evitar complejidades matemáticas e incidir más sobre conceptos más propios de Teoría de Circuitos. El estudio de transitorios de orden mayor requeriría, desde luego, de estas herramientas matemáticas. Este capítulo constituye, pues, una primera aproximación a los transitorios, de utilidad tanto para la ingeniería eléctrica como para la electrónica.

En cada capítulo se incluye una introducción teórica, un conjunto de problemas resueltos en detalle, problemas propuestos sin solución desarrollada para que el lector interesado los resuelva, aunque se incluyen los resultados numéricos para que pueda comprobarse la solución obtenida. También se han incluido cuestiones teórico-prácticas, con resultados numéricos, que exigen un desarrollo numérico muy reducido y que inciden en conceptos importantes del capítulo. En cuanto a la introducción teórica, su inclusión en este libro de problemas tiene por objeto servir de consulta fácil y de recordatorio en la resolución de los problemas, y establecer la notación que se empleará a lo largo del capítulo.

Esperamos que este libro sea de utilidad a los estudiantes de Teoría de Circuitos, a los que les rogamos disculpen las erratas que puedan haberse introducido.

Julio Usaola García
M.ª Ángeles Moreno López de Saá
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Carlos III de Madrid



CAPÍTULO 1

CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA

1.1. MAGNITUDES BÁSICAS

Se define *corriente eléctrica* i como la variación de carga eléctrica con respecto al tiempo. Por convenio se entiende que el desplazamiento de cargas ideales positivas entre dos puntos produce una circulación de corriente en el sentido de este desplazamiento. La unidad de corriente eléctrica en el Sistema Internacional de unidades es el amperio (A).

Se entiende por *tensión eléctrica* o simplemente *tensión* entre dos puntos, u_{AB}, la diferencia que existe entre los potenciales eléctricos de dos puntos A y B de un circuito, $u_{AB} = u_A - u_B$. La unidad de tensión en el Sistema Internacional de unidades es el voltio (V).

El sentido de la flecha de la Figura 1.1.b) es arbitrario e indica que, si la magnitud es positiva, el potencial eléctrico en el punto de origen de la flecha es superior al potencial eléctrico en el final de la flecha.

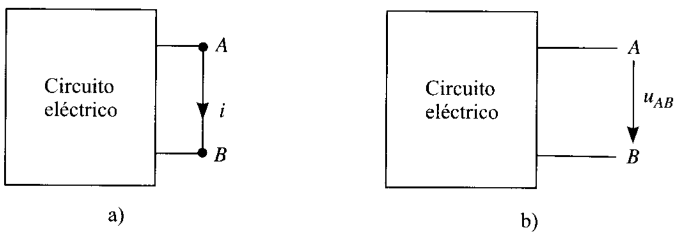


Figura 1.1.

La potencia eléctrica instantánea es el producto de la tensión instantánea por la corriente instantánea, $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Se mide en vatios (W). La energía w que entra en el circuito entre los instantes t_1 y t_2 es:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} u(\tau) \cdot i(\tau)\, d\tau$$

Se mide en julios (J). En la Figura 1.2 se muestra un dipolo en el que las referencias son de potencia entrante, esto es, que una magnitud de potencia positiva implica que el dipolo está recibiendo potencia eléctrica.

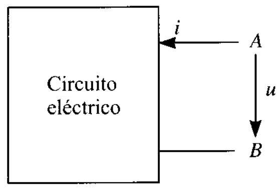


Figura 1.2. Dipolo con referencias de potencia entrante.

1.2. LEYES DE KIRCHHOFF

Primera ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las intensidades entrantes en un nudo es nula en todo instante. Esta ley puede aplicarse no solo a nudos sino también a cualquier región cerrada.

Segunda ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante.

1.3. ELEMENTOS DE LOS CIRCUITOS

• Resistencia

Una resistencia R es un dipolo en el que en un instante t su tensión $u(t)$ y su corriente $i(t)$ satisfacen una relación definida por una curva en el plano u-i. Esta curva se conoce como *característica* de la resistencia en el instante t. La magnitud R se conoce como *resistencia* y se mide en *ohmios* (Ω). La magnitud $G = \frac{1}{R}$ se denomina *conductancia* y se mide en siemens (S), o bien ohmios^{-1} (Ω^{-1}).

Ley de Ohm para resistencias lineales:

$$u = R \cdot i$$

Con las referencias de la Figura 1.3, el valor de la potencia entrante en una resistencia es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

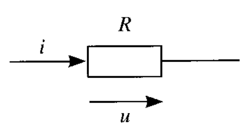


Figura 1.3. Resistencia con referencias de potencia entrante.

Una resistencia siempre absorbe potencia. La energía absorbida por una resistencia vale:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} R \cdot i^2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{u^2(\tau)}{R}\, d\tau$$

• Capacidad

Un condensador C es un dipolo en el que en un instante t, la carga almacenada en él y la tensión en bornas satisfacen una relación definida por una curva en el plano (u-q).

En un condensador lineal la relación entre la corriente y la tensión es:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

C es la *capacidad* del condensador y se mide en Faradios (F). Con las referencias de la Figura 1.4, la potencia entrante en un condensador es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u \cdot C \cdot \frac{du}{dt}$$

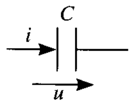


Figura 1.4. Condensador con referencia de potencia entrante.

La energía almacenada en el condensador es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} C \cdot u(\tau) \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\, C \cdot u^2(t)$$

- **Inductancia**

Una bobina, o inductancia, lineal e invariante con el tiempo es un dipolo en el cual la relación entre la tensión y la corriente está definida por la ecuación siguiente con las referencias de la Figura 1.5. El parámetro L se denomina *inductancia* de la bobina y se mide en Henrios (H).

$$u = L\frac{di}{dt}$$

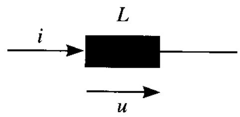


Figura 1.5. Bobina con referencia de potencia entrante.

La expresión de la potencia entrante en la bobina es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i(t)$$

El valor de la energía almacenada en la bobina en un instante t es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} L\,\frac{di(\tau)}{d\tau}\, i(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\, L \cdot i^2(t)$$

- **Bobinas acopladas**

Las ecuaciones de tres bobinas acopladas como las de la Figura 1.6 vienen dadas en las ecuaciones expuestas a continuación.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_3 = M_{31} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt}$$

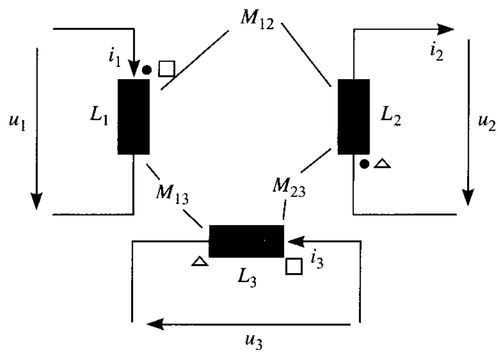


Figura 1.6.

M_{ij} son los coeficientes de *inducción mutua* de la bobina. Los coeficientes L_i se denominan *inductancias propias* o *coeficientes de autoinducción*. Ambas se miden en Henrios. Los terminales señalados con el mismo signo se denominan *correspondientes*. Los terminales sólo son correspondientes entre parejas de bobinas.

La potencia entrante en un cuadripolo como el de la Figura 1.7 viene dado por la ecuación:

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2\right]$$

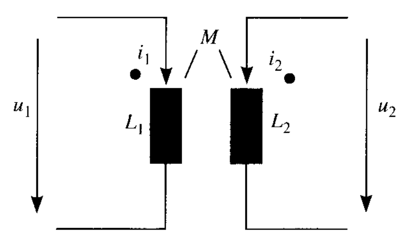


Figura 1.7.

Si las corrientes circulantes por las bobinas en $t = -\infty$ son nulas, la energía almacenada en las bobinas acopladas es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2$$

• Transformador ideal

Un transformador ideal es un cuadripolo cuyo esquema y relaciones entre sus parámetros vienen dados por la Figura 1.8 y las ecuaciones siguientes. El parámetro a se conoce como relación de transformación.

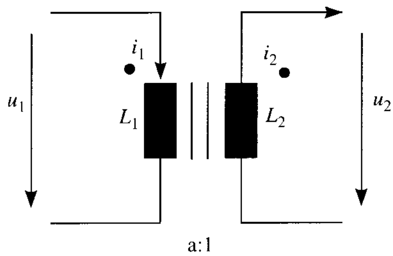


Figura 1.8. Transformador ideal.

$$\frac{u_1}{u_2} = a \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{a}$$

En un transformador ideal, la potencia consumida en todo instante es nula.

• Fuentes de tensión

Una fuente de tensión *ideal* es un dispositivo que mantiene una tensión entre sus terminales independientemente de la corriente que circule por ellos. Se representa en la Figura 1.9. El signo «+» indica que la tensión en A es superior a la tensión en B en e_g V.

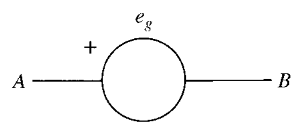


Figura 1.9. Fuente ideal de tensión.

Una fuente de tensión real, en corriente continua, consiste en una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia. La relación entre tensión y corriente entre sus terminales (*ecuación terminal*) es:

$$u = e_g - R_g \cdot i$$

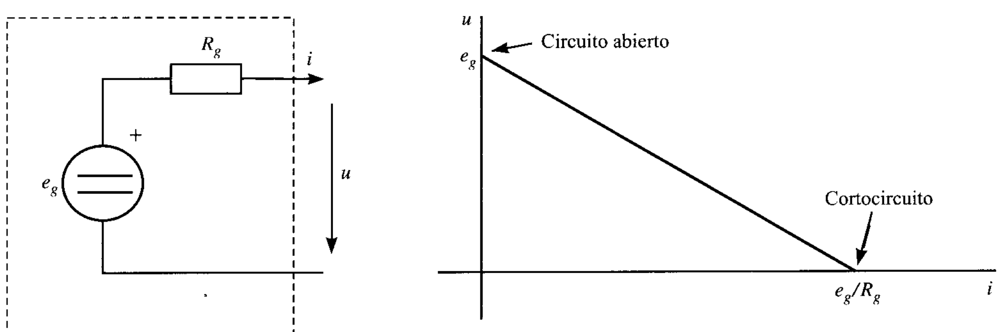


Figura 1.10. Fuente real de tensión.

• Fuentes de corriente

Una fuente de corriente *ideal* es un dispositivo por el que circula una corriente dada para cualquier tensión entre sus terminales. Se representa como en la Figura 1.11. La flecha indica el sentido de circulación de la corriente i_g:

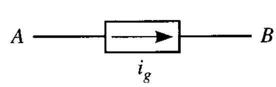


Figura 1.11. Fuente ideal de corriente

Una fuente real de corriente continua consiste en una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia. Su característica corriente-tensión es:

$$i = i_g - G_g \cdot u$$

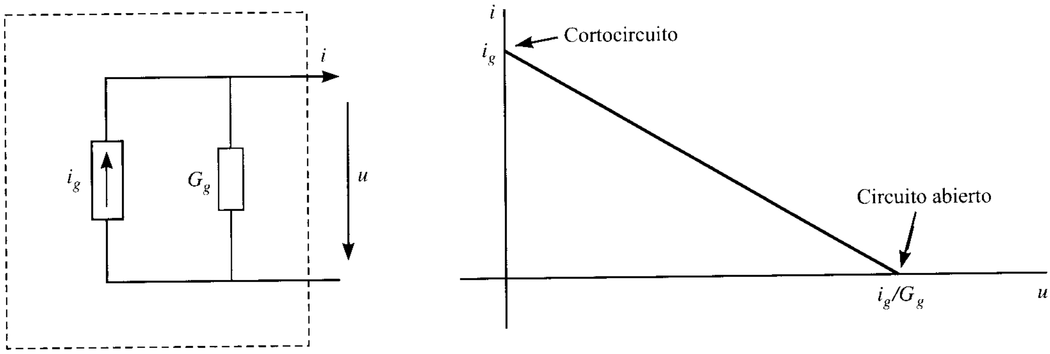


Figura 1.12. Fuente real de corriente.

• Equivalencia de fuentes reales

Dos fuentes reales son equivalentes si para cualquier tensión aplicada a las dos, suministran la misma corriente. Para ello deben cumplir las siguientes condiciones:

$$i_g = \frac{e_g}{R_g} \qquad G_g = \frac{1}{R_g}$$

• Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes son fuentes ideales de tensión o corriente cuya magnitud viene determinada por la tensión entre dos puntos, o la corriente que circula por una rama. En la Figura 1.13 se representan los cuatro tipos posibles.

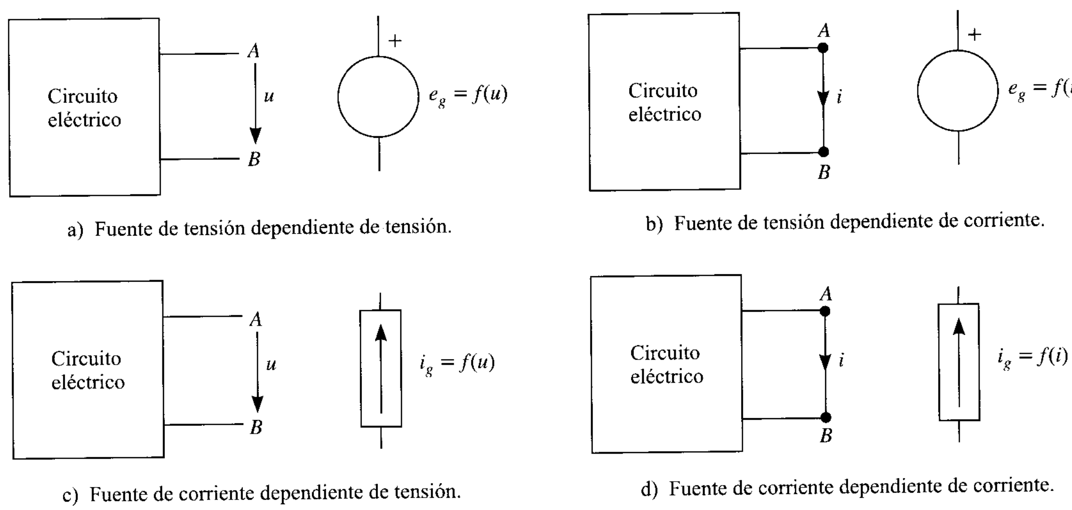


Figura 1.13.

1.4. ASOCIACIONES DE ELEMENTOS

• Asociación de fuentes ideales

Fuentes de tensión en serie:

$$e_{eq} = e_1 - e_2 + \cdots + e_n$$

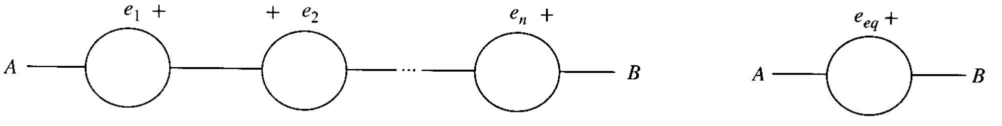


Figura 1.14.

Fuentes de corriente en paralelo:

$$i_{eq} = i_1 - i_2 + \cdots + i_n$$

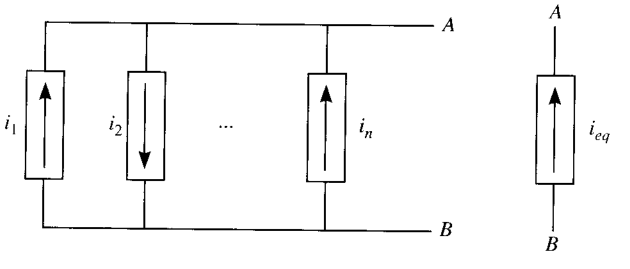


Figura 1.15.

• Asociaciones de resistencias

Asociación en serie:

Un conjunto de resistencias están asociadas en serie cuando por ellas circula la misma corriente, tal como se muestra en la Figura 1.16.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

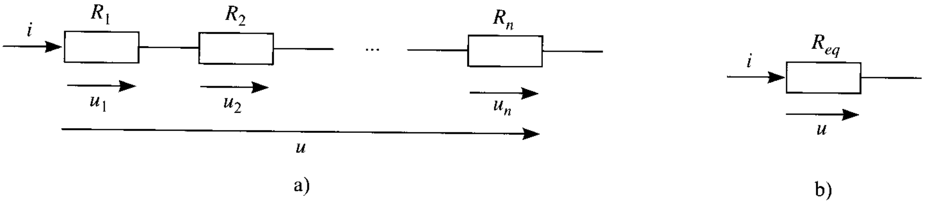


Figura 1.16.

Conductancia equivalente de un conjunto de resistencias en serie:

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \cdots + \frac{1}{G_n}$$

Si se quiere conocer la tensión en la resistencia k, esta será:

$$u_k = R_k \cdot i = R_k \cdot \frac{u}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \cdot u$$

Un conjunto de resistencias en serie se denomina *divisor de tensión.*

Asociación en paralelo. Divisor de corriente:

Un conjunto de resistencias están asociadas en paralelo cuando todas ellas están sometidas a la misma tensión, tal como se muestra en la Figura 1.17.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

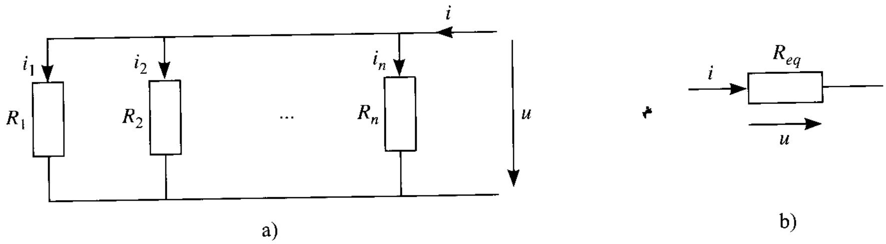


Figura 1.17.

La corriente que circula por la resistencia k es:

$$i_k = \frac{u}{R_k} = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} \cdot i$$

En función de las conductancias, se obtiene las siguientes expresiones:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

$$i_k = G_k \cdot u = G_k \cdot \frac{i}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} \cdot i$$

Un conjunto de resistencias en paralelo se denomina *divisor de corriente.*

- **Transformaciones triángulo-estrella y estrella-triángulo**

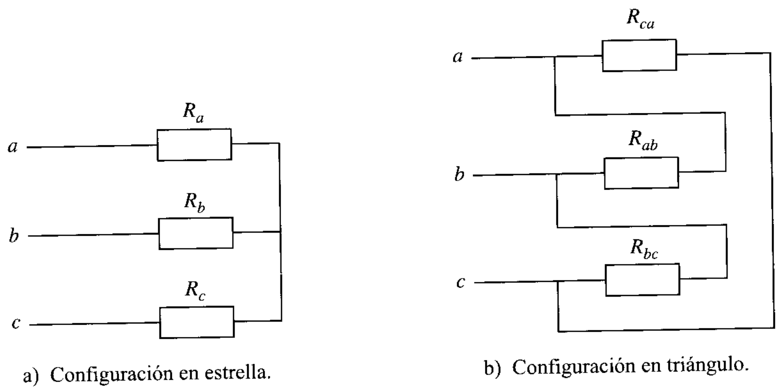


Figura 1.18.

Transformación triángulo-estrella

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Transformación estrella-triángulo

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}$$

$$R_{ca} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}$$

1.5. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

- Rama: es un elemento o grupo de elementos que presenta dos terminales. Queda definida por una relación entre la tensión que hay entre sus extremos, u, y la corriente que circula por ella i. La rama resistiva más general se muestra en la Figura 1.19.

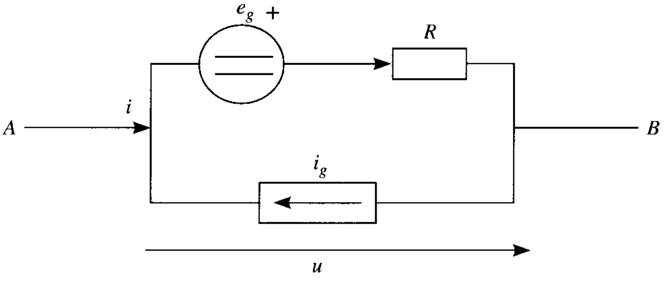


Figura 1.19.

La relación entre la tensión y la intensidad de esta rama se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff, y se puede escribir como:

$$u = -e_g + R \cdot (i + i_g)$$

- Nudo: es el punto de unión de dos o más ramas.
- Malla: sólo está definida en circuitos planos. Es un conjunto de ramas que forma una línea cerrada y que no contiene otra en su interior.

• Método de nudos

Para resolver un circuito por el método de nudos se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} g_{n1,1} & g_{n1,2} & \cdots & g_{n1,n} \\ g_{n2,1} & g_{n2,2} & \cdots & g_{n2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{nn,1} & g_{nn,2} & \cdots & g_{nn,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$[G] \cdot [u] = [I]$$

$[G]$ es la *matriz de conductancias nodales*. Sus términos tienen el siguiente valor:

$$g_{ni,i} = \sum_j g_{ij}$$

$$g_{ni,j} = -g_{ij} \qquad (i \neq j)$$

donde g_{ij} es la conductancia de la rama que une los nudos i y j.

$[u]$ es el vector de tensiones de nudo, esto es, las diferencias entre la tensión de un nudo y la de un nudo cualquiera del circuito, que se escoge como *nudo de referencia.*

$[I]$ es el vector de corrientes de nudo, que está formado por las corrientes entrantes en un nudo provenientes de fuentes de corriente. Cada uno de los elementos se forma de la siguiente manera:

$$I_k = \sum_j i_{ij}$$

• Método de mallas

Para resolver un circuito por el método de mallas hay que resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} R_{m1,1} & R_{m1,2} & \cdots & R_{m1,m} \\ R_{m2,1} & R_{m2,2} & \cdots & R_{m2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{mn,1} & R_{mn,2} & \cdots & R_{mn,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}$$

$$[R] \cdot [i] = [E]$$

$[R]$ es la *matriz de resistencias de malla*, cuyos términos tienen el valor siguiente:

$$R_{mi,i} = \sum_j R_{ij}$$

$$R_{mi,j} = -R_{ij} \qquad (i \neq j)$$

$[i]$ es el vector de corrientes de malla.

$[E]$ es el vector de fuentes de tensión de malla, que está formado por las fuentes de tensión con sentidos opuestos al de referencia dentro de una malla. Si el sentido es el contrario, el signo con el que aparecen en la expresión final es negativo. Las componentes de este vector se obtienen de la siguiente manera:

$$E_k = \sum_j e_{ij}$$

1.6. TEOREMAS

• Teorema de superposición. Linealidad

1. La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado *(principio de superposición).*
2. Si todas las excitaciones de un circuito lineal se multiplican por una constante, todas las respuestas de dicho circuito vienen multiplicadas por esa misma constante.

• Teorema de sustitución

Si en un circuito se sustituye un elemento cualquiera por una fuente de corriente del valor de la corriente circulante en la rama, las magnitudes del circuito no varían. Lo mismo sucede si se sustituye el elemento por una fuente de tensión del valor de la tensión en bornes de este elemento.

• Teoremas de Thévenin y Norton

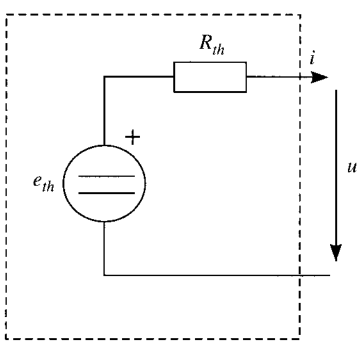
Teorema de Thévenin

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo sólo contiene resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de tensión y una resistencia en serie con ella. El valor de la fuente es la tensión a circuito abierto del dipolo entre los terminales, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas

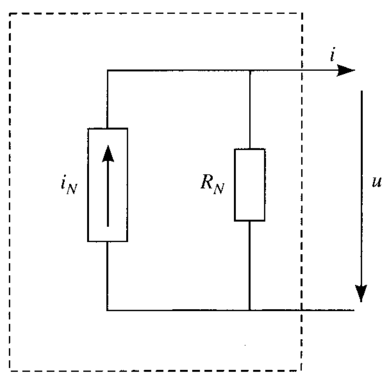
Teorema de Norton

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo no contiene más que resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de corriente y una resistencia en paralelo con ella. El valor de la fuente es la corriente que circula entre los terminales del dipolo cuando éstos están en cortocircuito, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas.

En la Figura 1.20 se muestran los equivalentes Thévenin y Norton de un circuito.



Equivalente Thévenin.



Equivalente Norton.

Figura 1.20.

• Fórmula de Millman

Esta fórmula es aplicable a un circuito como el de la Figura 1.21.

$$u_{AB} = \frac{G_1 u_{A1} + G_2 u_{A2} + \cdots + G_n u_{An}}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

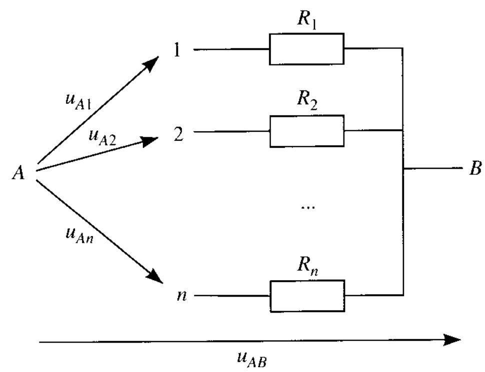


Figura 1.21.

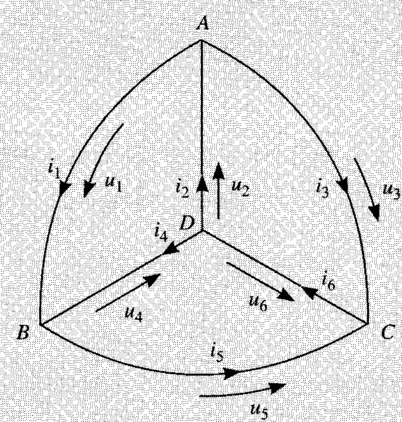
PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. **a)** Escribir las ecuaciones correspondientes a la aplicación de la primera ley de Kirchhoff, a los nudos del gráfico representado en la figura.

b) Comprobar que las ecuaciones son linealmente dependientes.

c) Obtener i_4 a partir de i_2 e i_6. Lo mismo para i_3 en función de i_1 e i_2.

d) Escribir las ecuaciones correspondientes a la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos cerrados: *ABDA*, *ADCA*, *ABCDA*, *ABCA*.



SOLUCIÓN

Aplicación de la primera ley de Kirchhoff a los distintos nudos:

Nudo *A*: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

Nudo *B*: $i_1 + i_4 - i_5 = 0$

Nudo *C*: $i_3 + i_5 - i_6 = 0$

Nudo *D*: $-i_2 - i_4 + i_6 = 0$

Suma total $0 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Las ecuaciones son linealmente dependientes.

De la ecuación correspondiente al nudo *D*:

$$i_4 = i_6 - i_2$$

De la ecuación del nudo *A*:

$$i_3 = i_2 - i_1$$

Aplicación de la segunda ley de Kirchhoff:

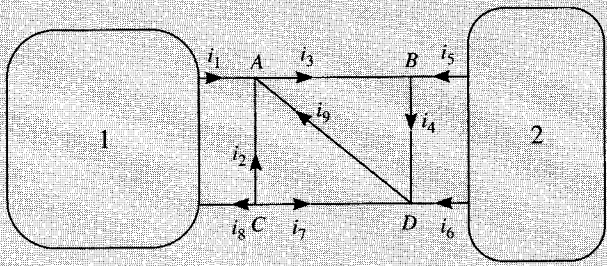
ABDA: $\quad u_1 + u_4 + u_2 = 0$

ADCA: $\quad -u_2 + u_6 - u_3 = 0$

$ABCDA \qquad u_1 + u_5 - u_6 + u_2 = 0$

$ABCA \qquad u_1 + u_5 - u_3 = 0$

1.2. Sabiendo que $i_1 = 3$ A, $i_4 = -5$ A, $i_7 = 2$ A e $i_9 = 2$ A, calcular las restantes intensidades en el gráfico de la figura.



SOLUCIÓN

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos, 1 y 2 incluidos:

Nudo D: $i_4 + i_7 + i_6 - i_9 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_6 = i_9 - i_4 - i_7 = 2 + 5 - 2 = 5$ A

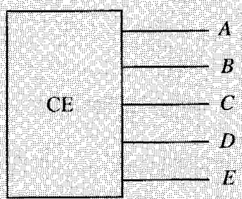
Nudo 1: $i_1 - i_8 = 0 \qquad i_8 = i_1 = 3$ A

Nudo 2: $-i_5 - i_6 = 0 \qquad i_5 = -i_6 = -5$ A

Nudo C: $-i_2 - i_8 - i_7 = 0 \qquad i_2 = -i_8 - i_7 = -3 - 2 = -5$ A

Nudo A: $-i_3 + i_1 + i_2 + i_9 = 0 \qquad i_3 = i_1 + i_2 + i_9 = 3 - 5 + 2 = 0$

1.3. La figura representa un multipolo, es decir, un circuito eléctrico con varios terminales. Sabiendo que las tensiones $u_{AB} = a$, $u_{DA} = b$, $u_{CE} = c$ y $u_{BE} = d$, expresar u_{EB}, u_{BC}, u_{CD} y u_{AC} como combinación lineal de a, b, c y d por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.



SOLUCIÓN

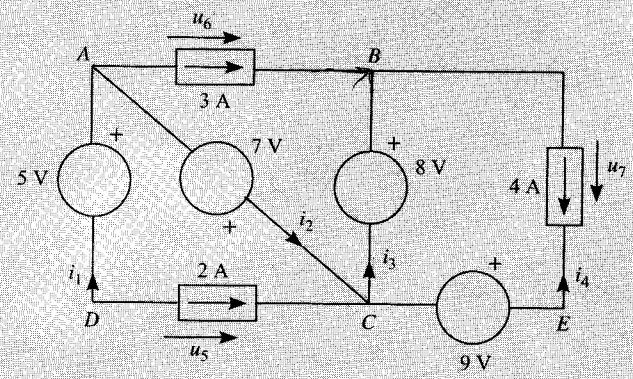
$u_{EB} = -u_{BE} = -d$

$u_{BC} = u_{BE} + u_{EC} = u_{BE} - u_{CE} = d - c$

$u_{CD} = u_{CE} + u_{EB} + u_{BA} + u_{AD} = u_{CE} - u_{BE} - u_{AB} - u_{DA} = c - d - a - b$

$u_{AC} = u_{AB} + u_{BE} + u_{EC} = u_{AB} + u_{BE} - u_{CE} = a + d - c$

1.4. Hallar las intensidades que circulan por cada fuente de tensión y las tensiones entre los bornes de cada fuente de intensidad.



SOLUCIÓN

Las intensidades se pueden hallar aplicando la primera ley de Kirchhoff a los nudos A, B y C:

A: $i_1 = i_2 + 3$

B: $3 + i_3 + i_4 = 0$

C: $i_2 + 2 = i_3 + i_4$

Pero $i_1 = -2$ A e $i_4 = -4$ A, pues ambas están fijadas por las fuentes de intensidad. Luego:

$i_2 = i_1 + 3 = -2 - 3 = -5$ A

$i_3 = -i_4 - 3 = 4 - 3 = 1$ A

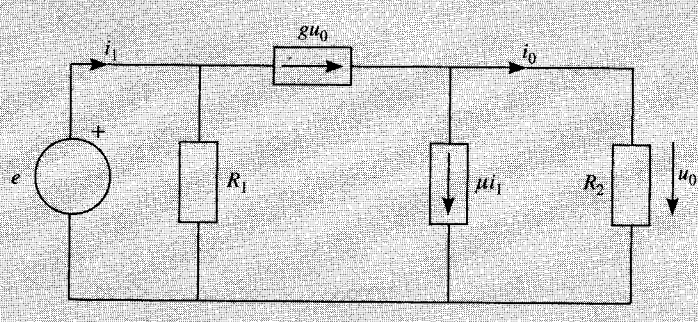
Para el cálculo de las tensiones se aplica la segunda ley de Kirchhoff a cada malla:

Malla *ADCA:* $5 + u_5 + 7 = 0 \Rightarrow u_5 = -12$ V

Malla *BECB:* $u_7 + 9 - 8 = 0 \Rightarrow u_7 = -1$ V

Malla *ABCA:* $u_6 + 8 + 7 = 0 \Rightarrow u_6 = -15$ V

1.5. Hallar i_o y u_o en el circuito de la figura en función de e, R_1, R_2, μ y g.



SOLUCIÓN

Por aplicación de la ley de Ohm:

$$u_o = R_2 \cdot i_o \tag{1}$$

Se aplica la primera ley de Kirchhoff a la corriente i_o:

$$i_o = g \cdot u_o - \mu \cdot i_1 \tag{2}$$

Se hace lo mismo con i_1:

$$i_1 = g \cdot u_o + e/R_1 \tag{3}$$

Se sustituye (3) en (2):

$$i_0 = g \cdot u_0 - \mu(g \cdot u_0 + e/R_1) = (1 - \mu)g \cdot u_o - \mu \cdot e/R_1 \tag{4}$$

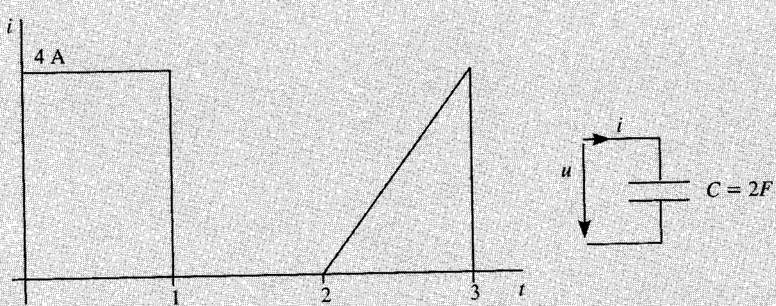
Se sustituye (4) en (1):

$$u_o = R_2(1 - \mu)g \cdot u_0 - \mu \cdot e \cdot R_2/R_1$$

$$u_o(1 - R_2(1 - \mu)g) = -\mu \cdot e \cdot R_2/R_1$$

$$u_o = \frac{-\mu R_2}{R_1(1 - R_2(1 - \mu)g)}\, e \qquad i_o = \frac{-\mu}{R_1(1 - R_2(1 - \mu)g)}\, e$$

1.6. A un condensador de 2 F descargado inicialmente y con las referencias de la figura se le aplica una intensidad cuya forma de onda es la dada en el gráfico $i = i(t)$. Determinar la forma de onda de la tensión u.



SOLUCIÓN

La ecuación del condensador es:

$$i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt}$$

de donde

$$u(t) = u(t_o) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

La expresión analítica de la corriente, a partir de la gráfica es:

$$i(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & 1 < t \leqslant 2 \\ 4t - 8 & 2 < t \leqslant 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

Se integra en cada tramo para hallar $u(t)$:

$0 < t \leqslant 1$: $$u(t) = u(0) + \frac{1}{2}\int_0^t 4dt = 0 + 2t = 2t$$

$1 < t \leqslant 2$: $$u(t) = u(1) + \frac{1}{2}\int_1^t 0dt = u(1) = 2$$

$2 < t \leqslant 3$: $$u(t) = u(2) + \, = 6 + \frac{1}{2}\int_0^t (4t - 8)\,dt = u(2) + \frac{4}{2}\left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^t = 6 + t^2 - 4t$$

$3 < t$: $$u(t) = u(3) + \frac{1}{2}\int_3^t 0dt = u(3) = 3$$

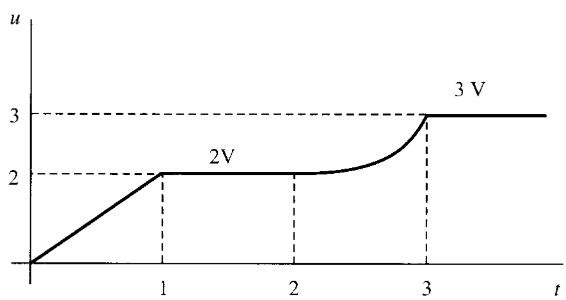
Por tanto, la expresión analítica de la tensión en el condensador es:

$$u(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t \leqslant 1 \\ 2 & 1 < t \leqslant 2 \\ 6 + t^2 - 4t & 2 < t \leqslant 3 \\ 3 & 3 < t \end{cases}$$

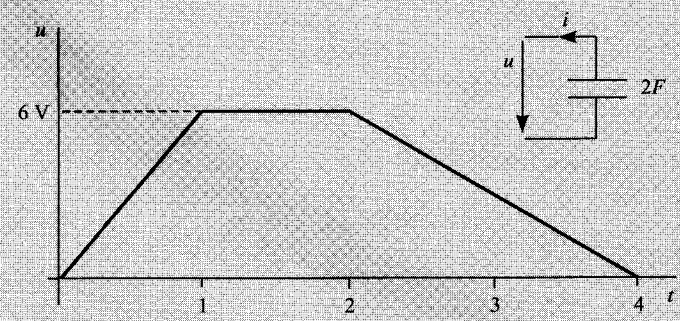
Para dibujar la gráfica falta determinar la curvatura del tercer tramo, lo cual puede hacerse a partir de la segunda derivada:

$$\frac{du^2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 4) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{convexa}$$

Representación gráfica de la tensión en el condensador:



1.7. La forma de onda representada en la figura corresponde a la tensión de los extremos de un condensador ideal de 2 F. Decir si en el instante $t = 3$ s, dicho condensador cede o absorbe energía y el valor de la energía almacenada en ese instante.



SOLUCIÓN

La ecuación del condensador con las referencias de la figura es:

$$i(t) = -C\,\frac{du(t)}{dt}$$

Expresión analítica de $u(t)$		Intensidad
$u(t) = 6t$	$0 < t \leqslant 1$	$i(t) = -2 \cdot 6 = -12$ A
$u(t) = 6$	$1 < t \leqslant 2$	$i(t) = 0$
$u(t) = -3(t-4)$	$2 < t \leqslant 4$	$i(t) = -2 \cdot (-3) = 6$ A
$u(t) = 0$	$t > 4$	$i(t) = 0$

La potencia instantánea es $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, potencia saliente con las referencias de la figura. La energía almacenada se calcula integrando la potencia absorbida a lo largo del tiempo:

$$w_{\text{alm}}(t) = \int p_{\text{abs}}(t)\,dt = -\int p_{\text{ced}}(t)\,dt = -\int u(t)i(t)\,dt = -\int u(t)(-C\,du) = \frac{1}{2}\,Cu^2(t)$$

En el instante $t = 3$ s:

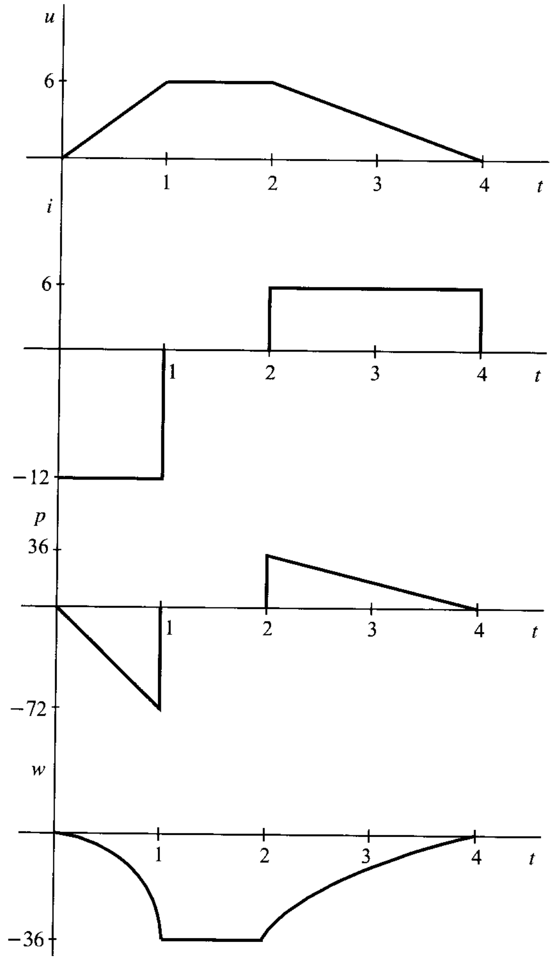
Potencia cedida: $p(t=3) = u(3) \cdot i(3) = 3 \cdot 6 = 18$ W (cedida a la red)

Energía almacenada: $w(t=3) = \frac{1}{2}\,Cu^2(3) = \frac{1}{2}\,2u^2(3) = 9$ J

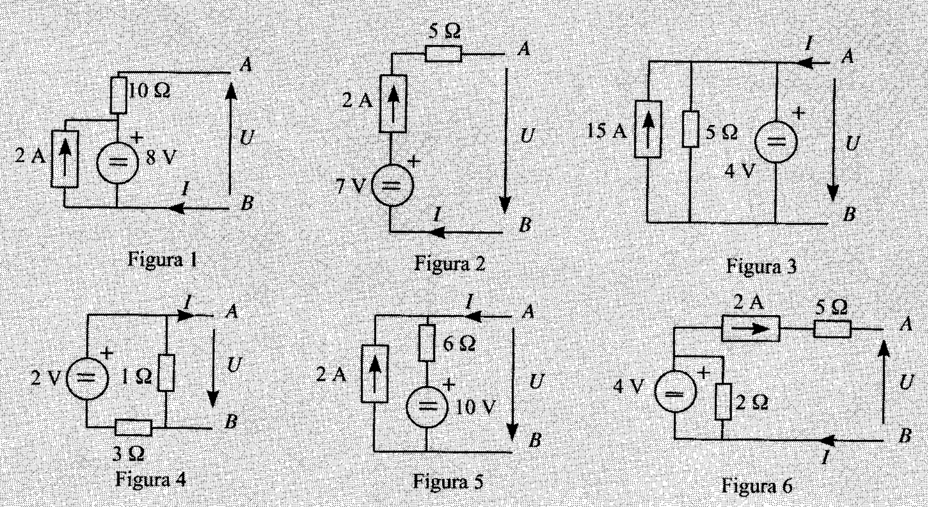
Las expresiones de la potencia y la energía cedida a la red en cada instante de tiempo son:

$p(t) = -72t$	$0 < t \leqslant 1$	$w(t) = -36t^2$
$p(t) = 0$	$1 < t \leqslant 2$	$w(t) = -36$
$p(t) = 18(4-t)$	$2 < t \leqslant 4$	$w(t) = -9(4-t)^2$
$p(t) = 0$	$t > 4$	$w(t) = 0$

Representación gráfica de todas las formas de onda:



1.8. Determinar la tensión U e intensidad I, o la relación entre estas magnitudes, en los terminales de cada uno de los circuitos mostrados en las figuras siguientes:



SOLUCIÓN

Figura 1

Puesto que la fuente de corriente está en paralelo con una fuente de tensión, la tensión entre sus terminales está definida por el valor de ésta, y por tanto,

$$U = 10 \cdot I - 8$$

Figura 2

La fuente de corriente impone, por definición, la corriente circulante por la rama. La tensión dependerá del elemento conectado entre A y B.

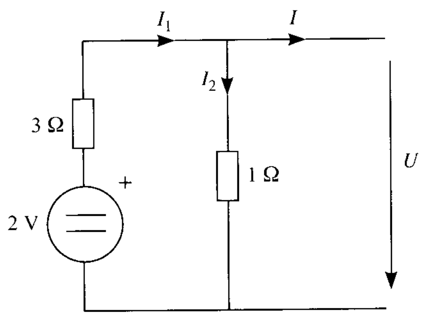
$$I = 2 \text{ A}$$

Figura 3

Análogamente al caso anterior, la tensión U viene dada por el valor de la fuente de tensión. La corriente dependerá del elemento conectado entre los terminales A y B.

$$U = 4 \text{ V}$$

Figura 4



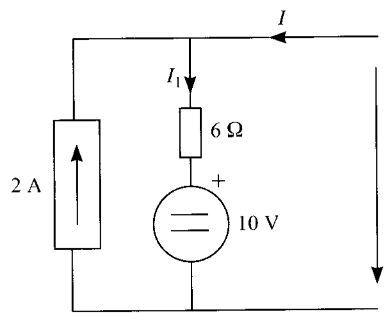
Aplicando las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm, así como la definición de fuente de tensión, se obtienen las ecuaciones:

$$U = I_2 \cdot 1$$
$$I = I_1 - I_2$$
$$3I_1 + I_2 = 2$$

Se sustituye y se llega a:

$$3I + 4U = 2$$

Figura 5



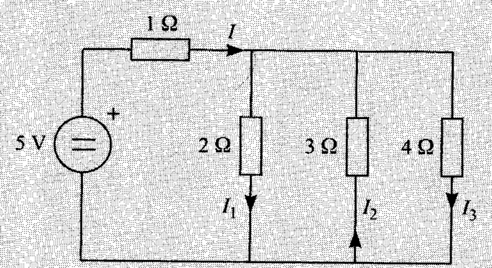
$$U = 6I_1 + 10$$
$$I_1 = I + 2$$
$$U = 6 \cdot (I + 2) + 10$$
$$U = 22 + 6I$$

Figura 6

Por definición de fuente de corriente, la que circula por la rama será:

$$I = 2\ \text{A}$$

1.9. Hallar la corriente en cada resistencia del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

La resistencia equivalente a la asociación de las tres que están en paralelo es:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{13}\ \Omega$$

La corriente resultante será:

$$I = \frac{5}{1 + \frac{12}{13}} = \frac{13}{5}\ \text{A}$$

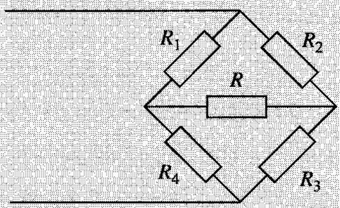
Al aplicar la fórmula del divisor de corriente se obtienen las corrientes por cada una de las ramas:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = \frac{6}{5}\ \text{A}$$

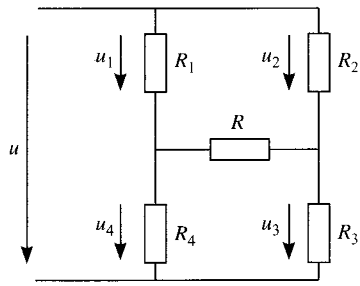
$$I_2 = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = -\frac{4}{5}\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = \frac{3}{5}\ \text{A}$$

1.10. La configuración dibujada en la figura recibe el nombre de «puente». Se dice que un puente está equilibrado cuando la intensidad que circula por R vale 0. Hallar la relación que deben de cumplir R_1, R_2, R_3 y R_4 para que el puente esté equilibrado.



SOLUCIÓN



Cuando la corriente por la resistenca R es nula, la tensión entre sus terminales también lo es, por lo que:

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4$$

Además, puesto que la corriente que circula por R es nula, la corriente que circula por R_1 es la misma que la que circula por R_4. Lo mismo sucede con las corrientes que circulan por R_2 y R_3. Por tanto, R_1 y R_4 forman un divisor de tensión, y R_2 y R_3 forman otro. Esto permite expresar las tensiones u_1 y u_2 como

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_4} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u$$

Se igualan ambas expresiones, obteniéndose que:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_4} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Lo que implica que

$$R_1R_3 = R_2R_4$$

Del mismo modo:

$$u_3 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} u$$

$$u_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_4} u$$

Y se llega a la misma conclusión:

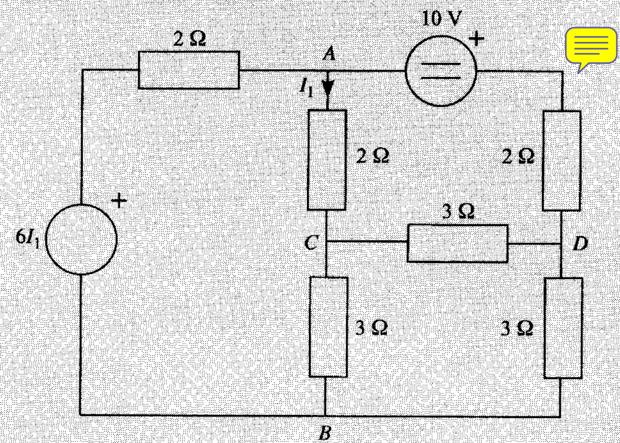
$$R_1R_3 = R_2R_4$$

Ésta es la relación que tienen que guardar entre sí las resistencias para que la corriente circulante por R sea nula.

1.11. Dado el circuito de la figura se pide:

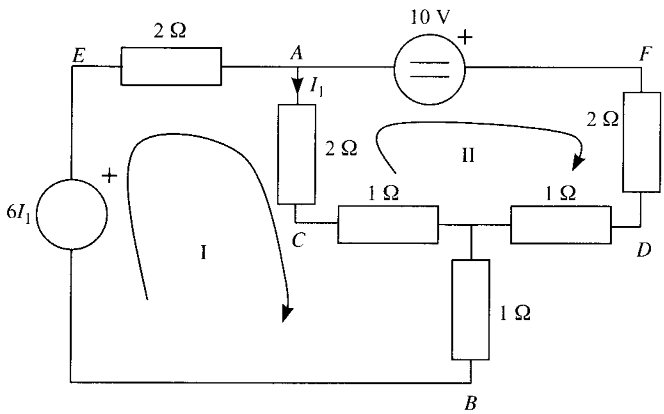
1. Simplificar el circuito con una transformación triángulo-estrella en el triángulo BCD y realizar el análisis por el método de mallas.

2. Calcular las tensiones e intensidades de las ramas del circuito original. Realizar el balance de potencias.



SOLUCIÓN

1. La transformación triángulo-estrella en el triángulo BCD da una resistencia equivalente en cada rama de la estrella de valor 1 Ω $\left(R_Y = \dfrac{R_\Delta}{3}\right)$, como indica la figura:



Las ecuaciones de cada malla son:

I: $(2 + 2 + 1 + 1)i_I - (2 + 1)i_{II} = 6I_1$

II: $-(2 + 1)i_I + (2 + 1 + 1 + 2)i_{II} = 10$

Pero la intensidad I_1 se puede poner en función de las intensidades de malla como $I_1 = i_I - i_{II}$. Por tanto al sustituir este valor se tiene:

$$6i_I - 3i_{II} = 6(i_I - i_{II})$$
$$-3i_I + 6i_{II} = 10$$

La solución de este sistema es:

$$i_{II} = 0 \text{ A} \qquad i_I = \text{-}10/3 \text{ A} \qquad I_1 = -10/3 \text{ A}$$

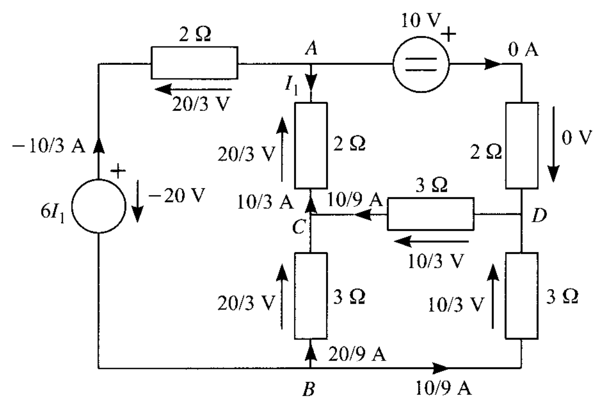
2. Cálculo de las tensiones (partiendo de la estrella):

$$u_{CB} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) + 1 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{DB} = 1 \cdot i_{II} + 1 \cdot i_I = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{CD} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) - 1 \cdot i_{II} = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{AC} = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{FD} = 2 \cdot i_{II} = 0 \text{ V}$$
$$u_{EA} = 2 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$

Cálculo de las intensidades:

$$i_{AC} = I_1 = -10/3 \text{ A}$$
$$i_{AF} = i_{II} = 0 \text{ A}$$
$$i_{BE} = i_I = -10/3 \text{ A}$$
$$i_{CB} = u_{CB}/3 = (-20/3)/3 = -20/9 \text{ A}$$
$$i_{CD} = u_{CD}/3 = (-10/3)/3 = -10/9 \text{ A}$$
$$i_{BD} = u_{BD}/3 = \text{-}u_{DB}/3 = -(-10/3)/3 = 10/9 \text{ A}$$

Las tensiones y corrientes del diagrama original se muestran en la figura:



Balance de potencias:

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = -20 \cdot (-10/3) + 10 \cdot 0 = 200/3 \text{ W}$$

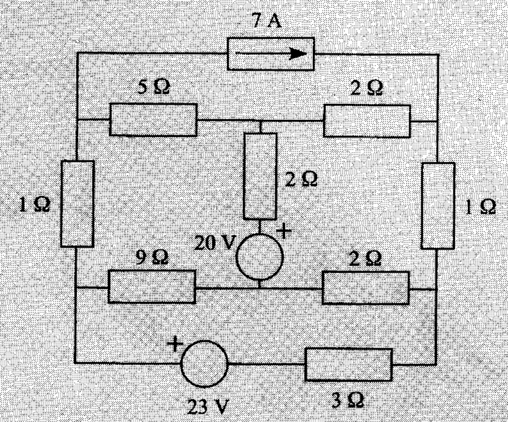
Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma P_c = 20/3 \cdot 10/3 + 20/3 \cdot 10/3 + 10/3 \cdot 10/9 + 20/3 \cdot 20/9 + 10/3 \cdot 10/9 =$$
$$= 200/9 + 200/9 + 100/27 + 400/27 + 100/27 = 1800/27 = 200/3 \text{ W}$$

Y se cumple que:

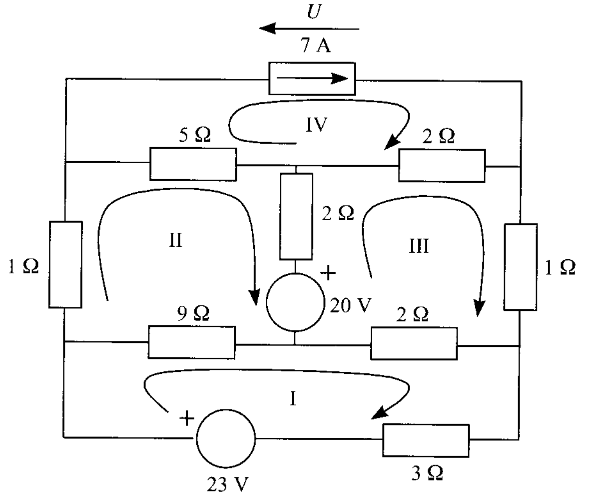
$$\Sigma P_g = \Sigma P_c$$

1.12. **Efectuar el análisis por mallas del circuito de la figura.**



SOLUCIÓN

Para efectuar el análisis por mallas se numeran las mallas según se muestra en la figura y se toma como incógnita la tensión U de la fuente de corriente.



Las ecuaciones de mallas son:

I: $(9 + 2 + 3)i_I - 9i_{II} - 2i_{III} = 23$

II: $-9i_i + (1 + 5 + 2 + 9)i_{II} - 2i_{III} - 5i_{IV} = -20$

III: $-2i_I - 2i_{II} + (2 + 2 + 1 + 2)i_{III} - 2i_{IV} = 20$

IV: $-5i_{II} - 2i_{III} + (5 + 2)i_{IV} = U$

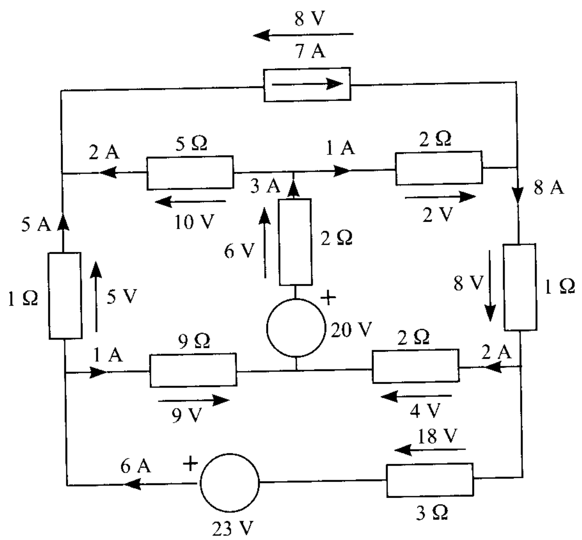
Pero la fuente de corriente impone la intensidad $i_{IV} = 7$ A. Por tanto, el sistema de ecuaciones queda como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \text{I:} &\quad 14i_I - 9i_{II} - 2i_{III} = 23 \\ \text{II:} &\quad -9i_I + 17i_{II} - 2i_{III} = 15 \\ \text{III:} &\quad -2i_I - 2i_{II} + 7i_{III} = 34 \\ \text{IV:} &\quad -5i_{II} - 2i_{III} - U = -49 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$i_I = 6 \text{ A}, \qquad i_{II} = 5 \text{ A}, \qquad i_{III} = 8 \text{ A}, \qquad U = 8 \text{ V}$$

Las corrientes y tensiones en cada elemento se muestran en la figura:



Balance de potencias:

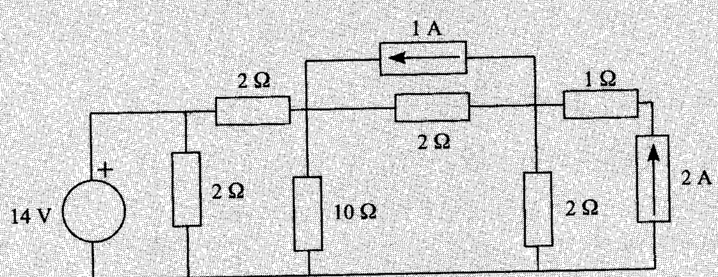
Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = 138 + 60 + 56 = 254 \text{ W}$$

Potencias consumidas en las resistencias

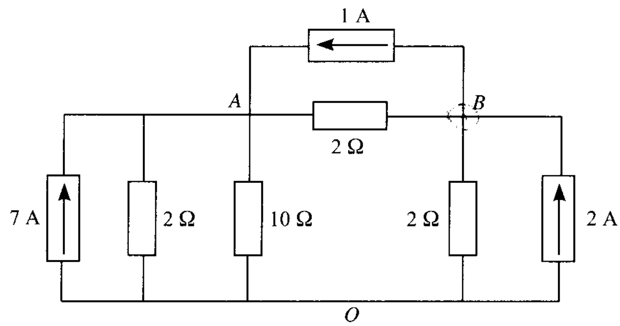
$$\Sigma P_c = 25 + 20 + 9 + 18 + 2 + 64 + 8 + 108 = 254 \text{ W}$$

1.13. Efectuar el análisis por nudos del circuito de la figura, determinando tensión e intensidad en cada elemento, la potencia absorbida por cada resistencia y la cedida por las fuentes.



SOLUCIÓN

Se eliminan del circuito, puesto que no proporcionan ninguna ecuación más, la resistencia en serie con la fuente de corriente y la que está en paralelo con la fuente de tensión. Esta última queda, tras esta operación, en serie con una resistencia, por lo que se puede convertir en una fuente real de corriente equivalente, operación necesaria para la aplicación del método de nudos. Tras estas transformaciones, el circuito equivalente que resulta es:



Se aplican las ecuaciones del método de nudos, tomando como incógnitas las tensiones en los nudos A y B con respecto a la referencia, que será el nudo O. Las ecuaciones serán:

$$A: \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)u_A - \frac{1}{2}\,u_B = 7 + 1$$

$$B: \quad -\frac{1}{2}\,u_A + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u_B = 2 - 1$$

Es decir:

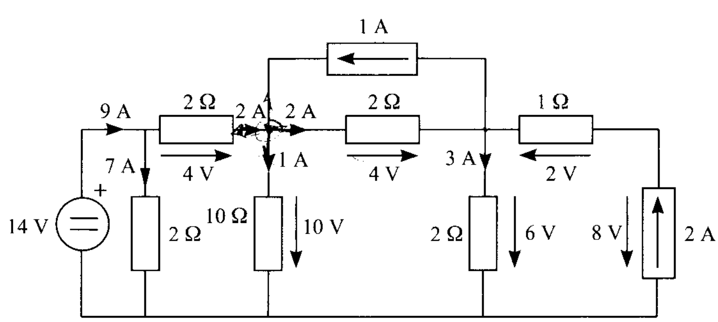
$$A: \quad 11u_A - 5u_B = 80$$

$$B: -\frac{1}{2}\,u_A + u_B = 1$$

La solución del sistema es

$$u_A = 10 \text{ V} \qquad u_B = 6 \text{ V}$$

A partir de la tensión en estos nudos, y mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff, se obtienen las restantes tensiones y corrientes.



Se realiza el balance de potencias consumidas y generadas.

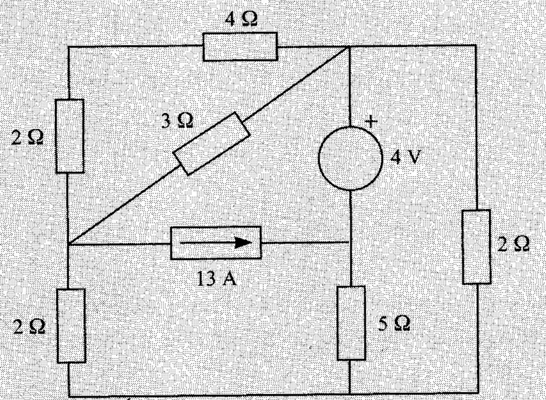
Potencias consumidas en las resistencias

$$\Sigma P_c = 7^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1 = 146 \text{ W}$$

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = 14 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 146 \text{ W}$$

1.14. Analizar por nudos el circuito de la figura. *Idem*, por mallas.



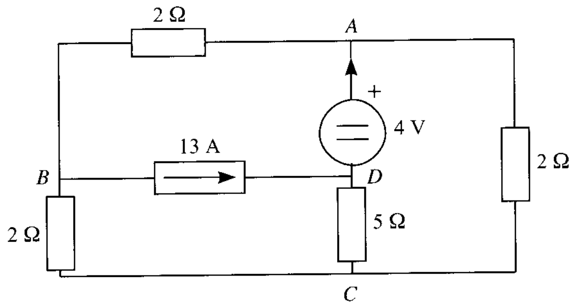
SOLUCIÓN

En primer lugar, se realiza la asociación de las resistencias de 2 Ω, 3 Ω y 4 Ω. El valor de la resistencia equivalente es de 2 Ω:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2+4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = 2 \ \Omega$$

Análisis por nudos

Método I: modificación de las ecuaciones



Es recomendable escoger como nudo de referencia el nudo D, pues de este modo la tensión de la fuente proporciona directamente una tensión de nudo. En este circuito se toma como incógnita la corriente que circula por la fuente de tensión, y se añade una ecuación más, que es la resultante de igualar la tensión del nudo A a 4 V.

$$A: \quad \frac{u_A - u_B}{2} + \frac{u_A - u_C}{2} = I$$

$$B:\quad \frac{u_B - u_A}{2} + \frac{u_B - u_C}{2} = -13$$

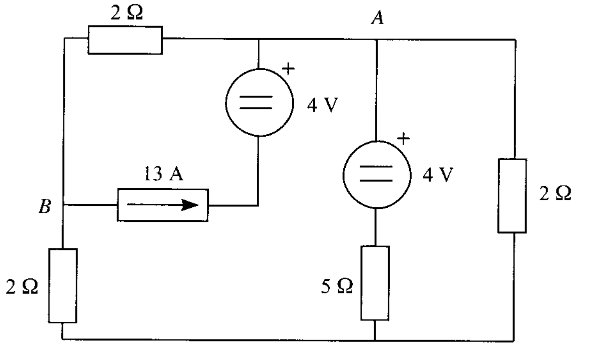
$$C:\quad \frac{u_C}{5} + \frac{u_C - u_B}{2} + \frac{u_C - u_A}{2} = 0$$

Solución de este sistema de ecuaciones:

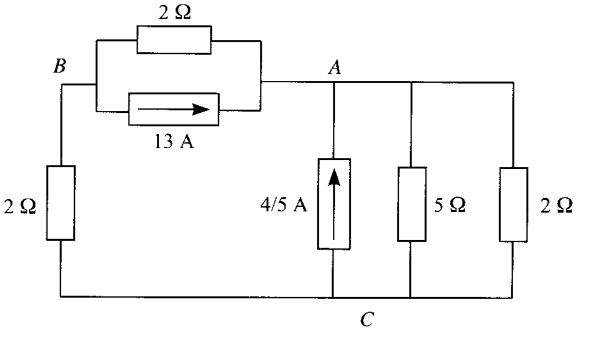
$$u_B = -12{,}84\ \text{V}, \qquad u_C = -3{,}68\ \text{V}, \qquad I = 12{,}25\ \text{A}$$

Método II: modificación de la geometría del circuito

Se transforma la fuente de tensión (que es la que hay que transformar para aplicar el método de nudos), tal como indica la figura. La transformación sitúa una de las fuentes de tensión en serie con una de corriente, por lo que la fuente de tensión no tiene incidencia en las ecuaciones nodales que finalmente se planteen. La fuente de tensión en serie con la resistencia de 5 Ω se puede transformar en una fuente de corriente en paralelo con una resistencia.



Tras estas transformaciones, el circuito queda de la siguiente manera:



Se plantean las ecuaciones nodales, tomando como referencia el nudo C.

$$A:\quad \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)u_A - \frac{1}{2}\,u_B = 13 + \frac{4}{5}$$

$$B:\quad -\frac{1}{2}\,u_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)u_B = -13$$

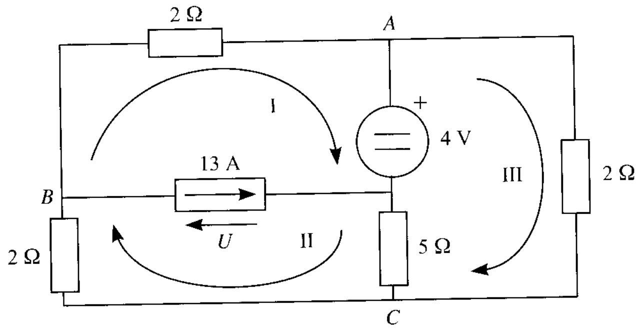
Solución de este sistema de ecuaciones:

$$u_A = 7{,}6842\ \text{V}, \qquad u_B = -9{,}1579\ \text{V}$$

Análisis por mallas

Método I: modificación de las ecuaciones

Se toma como incógnita la tensión en la fuente de corriente, y se añade una ecuación adicional, que es la resultante de igualar el valor de la fuente de corriente a la diferencia entre las corrientes de las mallas II y I.



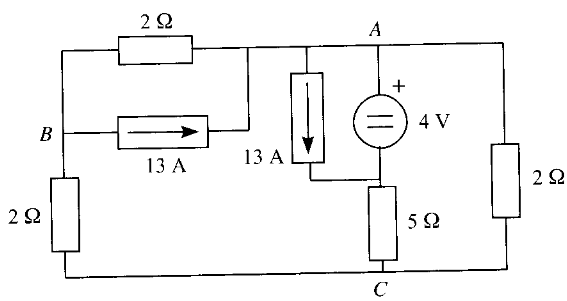
$$2i_I + U = -4$$
$$(2 + 5)i_{II} - 5i_{III} - U = 0$$
$$-5i_{II} + (5 + 2)i_{III} = 4$$
$$i_{II} - i_I = 13$$

Solución de este sistema de ecuaciones:

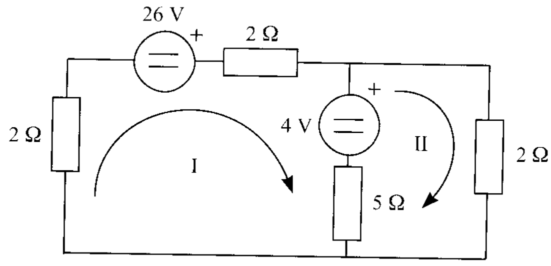
$U = 12{,}84$ V, $\quad i_I = -8{,}42$ A, $\quad i_{II} = 4{,}58$ A, $\quad i_{III} = 3{,}84$ A

Método II: modificación de la geometría del circuito

La fuente de corriente se transforma de la forma siguiente:



Al hacer la transformación de esta manera, una fuente ha quedado en paralelo con una fuente de tensión, por lo que no interviene en las ecuaciones por mallas. La otra fuente de corriente ha quedado en paralelo con la resistencia de 2 Ω, por lo que se puede transformar en una fuente de tensión en serie con una resistencia, tal como se muestra en la figura siguiente.



En este circuito se plantean las ecuaciones de malla, quedando:

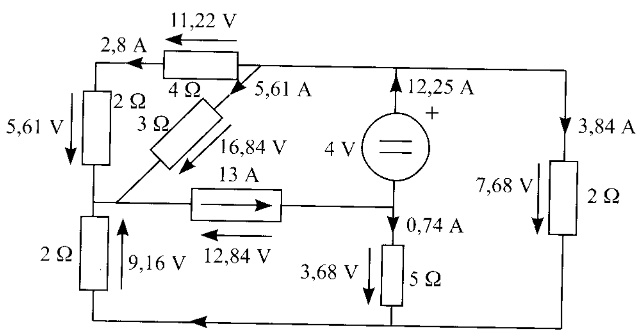
$$(2 + 2 + 5)i_I - 5i_{II} = 26 - 4$$

$$-5i_I + (5 + 2)i_{II} = 4$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$i_I = 4{,}58 \text{ A}, \qquad i_{II} = 3{,}84 \text{ A}$$

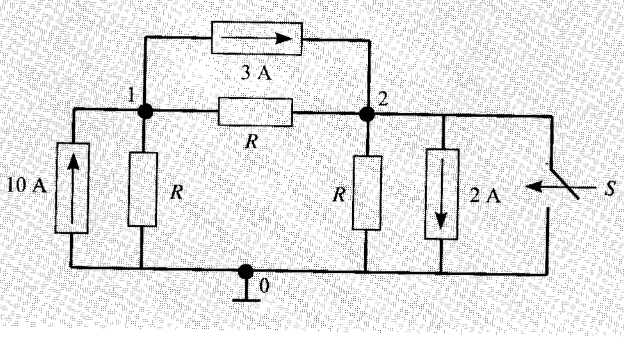
De aquí o de las soluciones obtenidas por otros métodos, mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff, se calculan las tensiones e intensidades en todos los elementos.



1.15. En el circuito de la figura cuando el interruptor S está cerrado, la tensión del nudo 1 es 7 V. Se pide

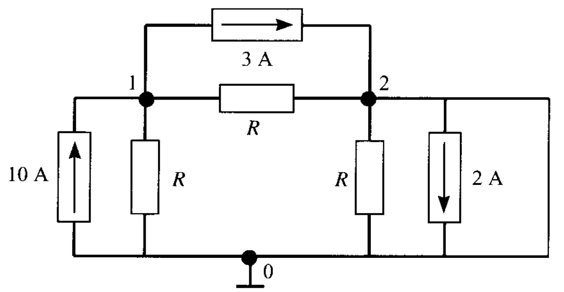
a) Determinar el valor de R.

b) Analizar por nudos el circuito cuando el interruptor S está abierto (con el valor de R calculado en el apartado anterior).

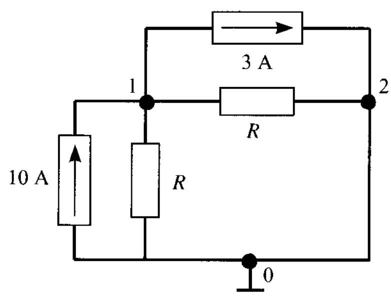


Solución

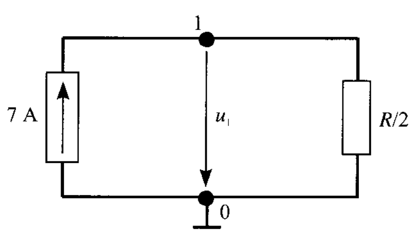
a) Cuando el interruptor S está cerrado, el circuito es:



que es equivalente al siguiente circuito, en el que se ha suprimido la fuente de corriente y la resistencia del nudo 2, por estar en paralelo con un cortocircuito.

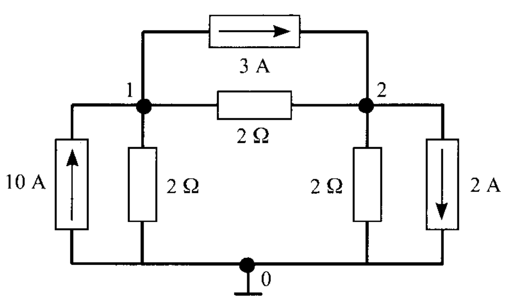


Agrupando las fuentes de corriente y las resistencias, que quedan en paralelo, se llega al siguiente circuito equivalente:



Como $u_1 = 7 \cdot R/2 = 7$ V, el valor de la resistencia es $R = 2\ \Omega$.

b) Con el interruptor S abierto, el circuito que se debe analizar es el que se muestra en la figura:



El análisis por nudos se puede realizar de manera directa. En forma matricial, las ecuaciones nodales son:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-3 \\ 3-2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

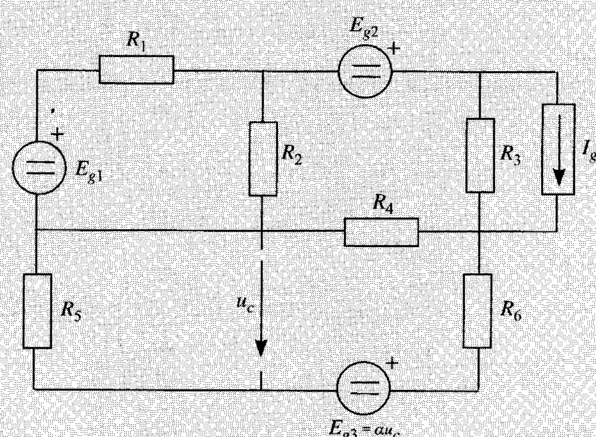
$$u_1 = 10 \text{ V}$$

$$u_2 = 6 \text{ V}$$

1.16. Realizar el análisis por mallas y el balance de potencias del circuito de la figura, en el que los parámetros toman los siguientes valores:

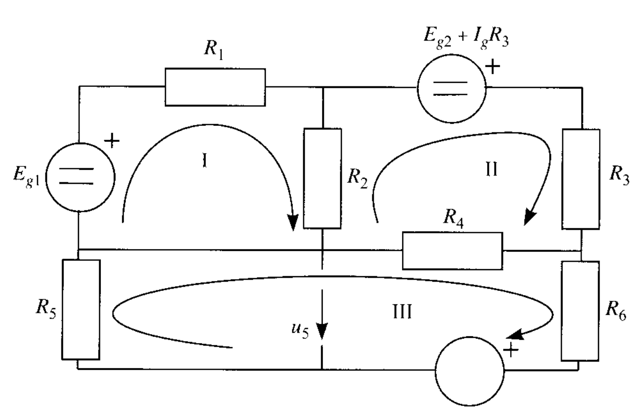
$R_1 = 4\ \Omega$ $R_2 = 2\ \Omega$ $R_3 = 2\ \Omega$ $R_4 = 2\ \Omega$ $R_5 = 1\Omega$ $R_6 = 1\ \Omega$

$E_{g1} = 6$ V $E_{g2} = 12$ V $I_g = 2$ A $\alpha = 10$



SOLUCIÓN

Se transforma la fuente de corriente real en fuente de tensión real, con lo que el circuito equivalente queda:



Las ecuaciones de mallas resultantes son:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)i_I - R_2 i_{II} \quad\quad\quad\quad\quad &= E_{g1} \\ -R_2 i_I + (R_2 + R_3 + R_4)i_{II} \quad - R_4 i_{III} &= E_{g2} + I_g R_3 \\ -R_4 i_{II} + (R_4 + R_5 + R_6)i_{III} &= \alpha R_5 i_{III} \end{aligned}$$

Se modifica la última ecuación:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)i_I - R_2 i_{II} \quad\quad\quad\quad\quad &= E_{g1} \\ -R_2 i_I + (R_2 + R_3 + R_4)i_{II} \quad - R_4 i_{III} &= E_{g2} + I_g R_3 \\ -R_4 i_{II} + (R_4 + R_5(1 - \alpha) + R_6)i_{III} &= 0 \end{aligned}$$

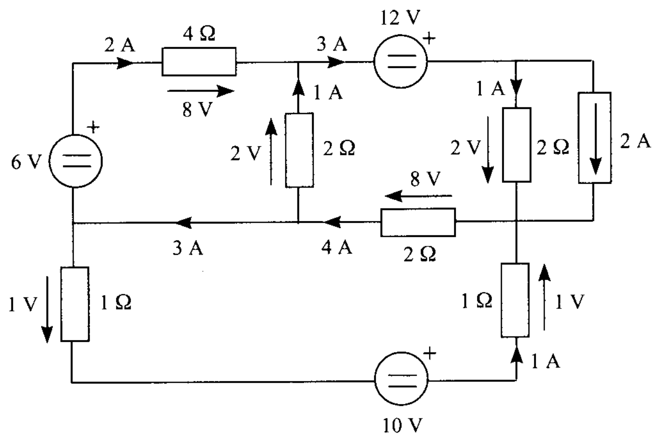
Sustituyendo los valores de todos los parámetros:

$$\begin{aligned} 6i_I - 2i_{II} \quad\quad &= 6 \\ -2i_I + 6i_{II} - 2i_{III} &= 16 \\ -2i_{II} - 6i_{III} &= 0 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$i_I = 2 \text{ A}, \qquad i_{II} = 3 \text{ A}, \qquad i_{III} = -1 \text{ A}$$

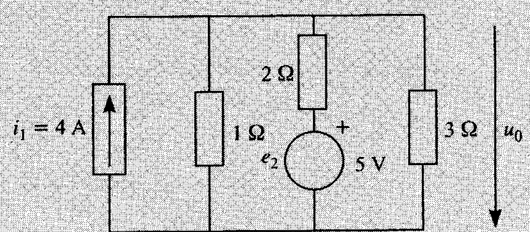
De aquí se obtienen las tensiones y corrientes por aplicación de las leyes de Kirchhoff:



El balance de potencias será:

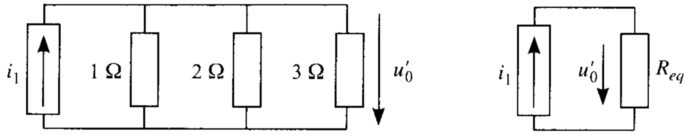
$$\Sigma P_c = 54 \text{ W} \qquad \Sigma P_g = 54 \text{ W}$$

1.17. Hallar la tensión u_0 en el circuito de la figura. Si i_1 y e_2 pasan a valer 8 A y 3 V respectivamente, ¿cuánto vale u_0?



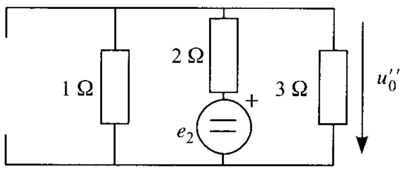
SOLUCIÓN

Se aplica superposición. En primer lugar, se obtiene el valor de la tensión u_0 cuando sólo actúa la fuente de corriente, u_0'.



$$u_0' = R_{eq} \cdot i_1 = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} i_1 = \frac{6}{6 + 3 + 2} i_1 = \frac{6}{11} i_1$$

A continuación, se obtiene la tensión cuando sólo actúa la fuente de tensión, u_0''.



Para obtener u_0'' se emplea la fórmula del divisor de tensión:

$$u_0'' = \frac{\frac{3 \cdot 1}{+ 1}}{\frac{3 \cdot 1}{3 + 1}} e_2 = \frac{3}{11} e_2$$

La tensión u_0 será la suma de ambas tensiones, u_0' y u_0'':

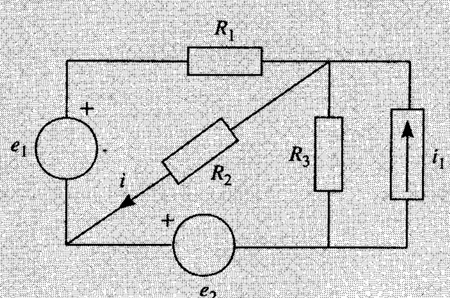
$$u_0 = u_0' + u_0'' = \frac{6}{11} i_1 + \frac{3}{11} e_2$$

A continuación, se particularizan los resultados para los valores indicados de fuente de tensión y corriente:

$$i_1 = 4 \text{ A} \quad ; \quad e_2 = 5 \text{ V} \quad u_0 = \frac{6}{11} 4 + \frac{3}{11} 5 = \frac{39}{11} \text{ V}$$

$$i_1 = 8 \text{ A} \quad ; \quad e_2 = 3 \text{ V} \quad u_0 = \frac{6}{11} 8 + \frac{3}{11} 3 = \frac{57}{11} \text{ V}$$

1.18. Hallar por aplicación del teorema de superposición la intensidad i del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

Valor de i cuando sólo actúa e_1. Se aplica la fórmula del divisor de tensión:

$$i' = \frac{e_1}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{e_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Valor de i cuando sólo actúa e_2:

$$i'' = \frac{-e}{R_3 + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{-e_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

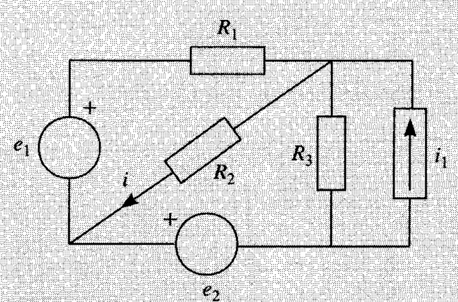
Valor de i cuando sólo actúa i_1. Se aplica la fórmula del divisor de corriente:

$$i''' = \frac{\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} i_1 = \frac{R_1R_3i_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

El valor final de la corriente es la suma de las tres componentes:

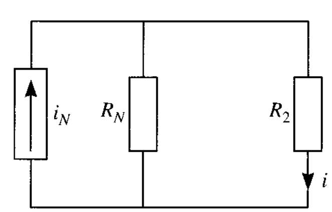
$$i = i' + i'' + i''' = \frac{e_1R_3 - e_2R_1 + R_1R_3i_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

1.19. Hallar por aplicación del teorema de Norton la intensidad i del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

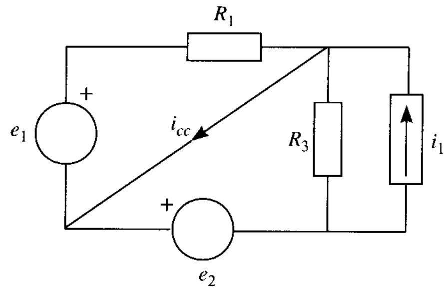
Se trata de hallar el quivalente Norton del circuito visto desde R_2, es decir:



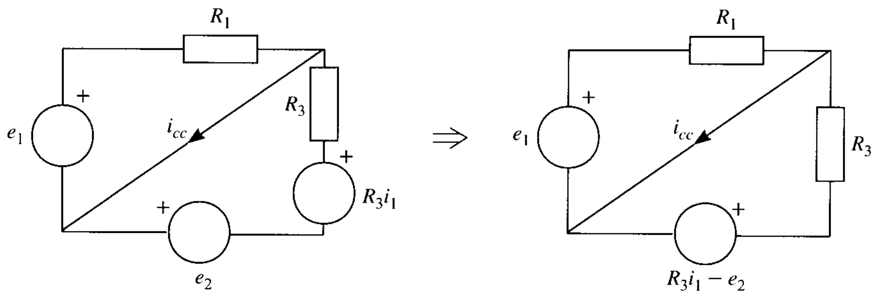
De esta forma se tiene un divisor de corriente, y la corriente que circula por la resistencia R_2 es:

$$i = \frac{R_N}{R_N + R_2} i_N$$

Cálculo de la corriente de cortocircuito i_{cc}:



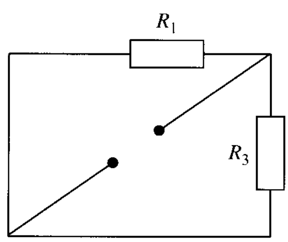
La fuente de corriente ideal en paralelo con la resistencia R_3 se puede transformar a una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia:



La intensidad de cortocircuito es:

$$i_{cc} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{R_3 i_1 - e_2}{R_3} = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_3} + i_1 = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_1 R_3}{R_1 R_3}$$

Cálculo de la resistencia Norton:

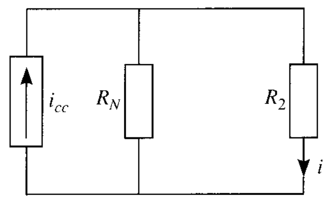


Para hallar la resistencia Norton se anulan las fuentes de tensión y de corriente, siendo el circuito resultante el que se muestra en la figura. La resistencia equivalente es el paralelo entre R_1 y R_3:

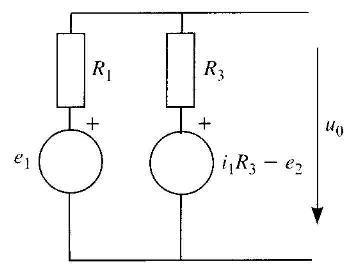
$$R_N = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

El equivalente buscado se muestra en la figura, y la corriente que circula por la resistencia R_2 es:

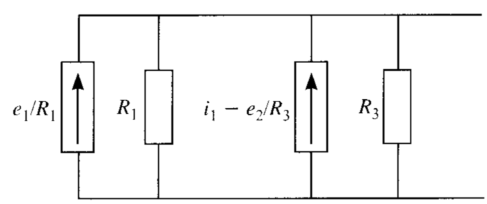
$$i = \frac{R_N}{R_N + R_2} i_{cc} = \frac{\dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3}}{\dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + R_2} \cdot \frac{e_1R_3 - e_2R_1 + i_1R_1R_3}{R_1R_3} = \frac{e_1R_3 - e_2R_1 + i_1R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$



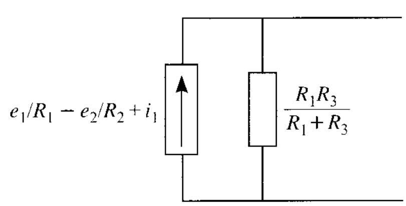
Como comprobación se calcula la tensión a circuito abierto. Para ello se toma el circuito equivalente mostrado a continuación:



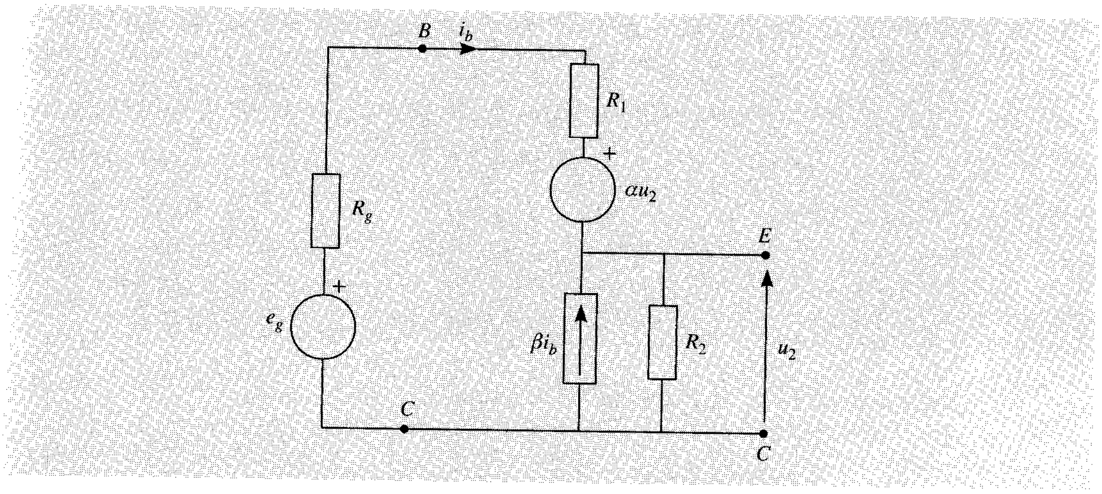
Se transforman las fuentes de tensión reales a fuentes de corriente:



Agrupando las fuentes de corriente por un lado y las resistencias por otro, se obtiene el equivalente Norton buscado:



1.20. El esquema de la figura representa el circuito equivalente de un seguidor de emisor. Calcular los equivalentes Thevenin y Norton respecto de los terminales *E-C*. Comprobar los resultados.



Solución

Tensión a circuito abierto u_0:

$$u_0 = u_{EC} = R_2(\beta i_b + i_b) = R_2(\beta + 1)i_b \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$(R_g + R_1)i_b = e_g - \alpha u_2 - u_0 \qquad (2)$$

Se despeja i_b de (1) y se sustituye en (2). Además $u_2 = -u_0$, por tanto la ecuación (2) se convierte en:

$$(R_g + R_1) = \frac{u_0}{R_2(\beta + 1)} = e_g + (\alpha - 1)u_0$$

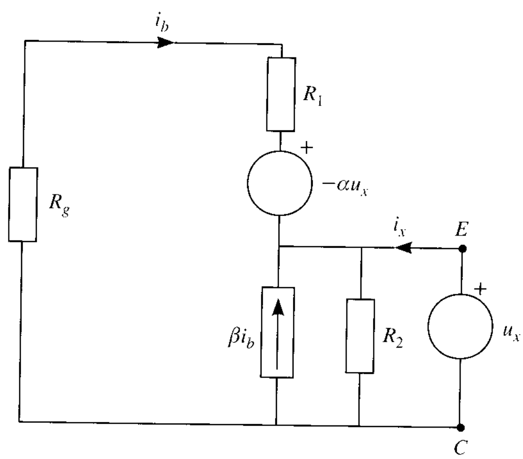
$$(R_g + R_1)u_0 = R_2(\beta + 1)e_g + R_2(\beta + 1)(\alpha - 1)u_0$$

$$[(R_g + R_1) - R_2(\beta + 1)(\alpha - 1)]u_0 = R_2(\beta + 1)e_g$$

Y la tensión a circuito abierto es:

$$u_0 = \frac{R_2(\beta + 1)e_g}{R_g + R_1 + R_2(\beta + 1)(1 - \alpha)}$$

Resistencia Thévenin R_{th}:



Se anulan las fuentes independientes del circuito, y se conecta entre los terminales E y C una fuente con un valor genérico u_x. El circuito resultante es el de la figura anterior.

Se obtiene el valor de la corriente i_x que produce esta fuente en función del parámetro u_x,

$$i_x = \frac{u_x}{R_2} - (\beta + 1)i_b$$

Pero

$$(R_g + R_1)i_b = \alpha u_x - u_x \quad \Rightarrow \quad i_b = \frac{(\alpha - 1)u_x}{R_g + R_1}$$

Sustituyendo i_b en el expresión de i_x se tiene:

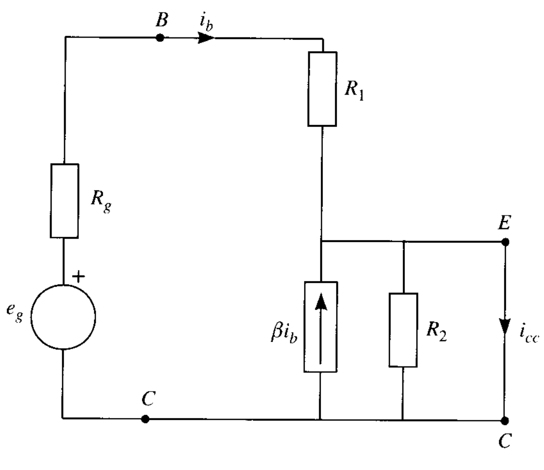
$$i_x = \left[\frac{1}{R_2} - (\beta + 1)\frac{(\alpha - 1)}{R_g + R_1}\right]u_x = \left[\frac{R_g + R_1 + R_2(\beta + 1)(1 - \alpha)}{R_2(R_g + R_1)}\right]u_x$$

Y la resistencia Thévenin:

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{R_2(R_g + R_1)}{R_g + R_1 + R_2(\beta + 1)(1 - \alpha)}$$

Corriente de cortocircuito i_{cc}:

Al cortocircuitar los terminales E y C, la tensión u_2 es nula, y por tanto se anula la fuente dependiente. El circuito resultante se muestra en la figura.



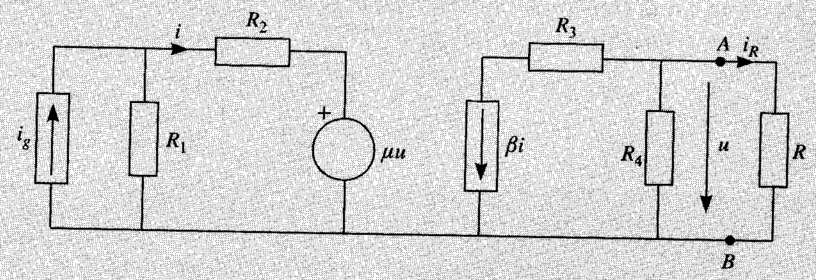
A partir de la figura la corriente de cortocircuito es:

$$i_{cc} = (\beta + 1)i_b = \frac{(\beta + 1)e_g}{R_g + R_1}$$

Como comprobación, se calcula la corriente de cortocircuito a partir de u_o y R_{th}:

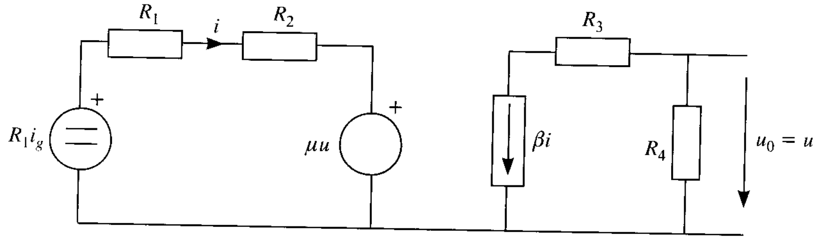
$$i_{cc} = \frac{u_0}{R_{th}} = \frac{\dfrac{R_2(\beta + 1)e_g}{R_g + R_1 + R_2(\beta + 1)(1 - \alpha)}}{\dfrac{R_2(R_g + R_1)}{R_g + R_1 + R_2(\beta + 1)(1 - \alpha)}} = \frac{(\beta + 1)e_g}{R_g + R_1}$$

1.21. Determinar la intensidad i_R por aplicación del teorema de Thévenin.



SOLUCIÓN

Tensión a circuito abierto, esto es, suponiendo desconectada la resistencia R.



$$u_0 = -R_4\beta i$$

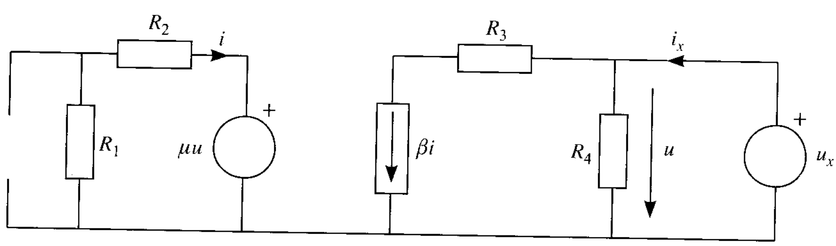
$$i = \frac{R_1 i_g - \mu u_0}{R_1 + R_2}$$

$$u_0 = -R_4\beta\,\frac{R_1 i_g - \mu u_0}{R_1 + R_2}$$

$$u_0(R_1 + R_2 - R_4\mu\beta) = -R_1R_4\beta i_g$$

$$\boxed{u_0 = \frac{-R_1R_4\beta i_g}{R_1 + R_2 - R_4\mu\beta}}$$

Resistencia Thévenin. Para obtenerla se anulan todas las fuentes independientes, y se conecta entre los terminales A y B una fuente con un valor genérico u_x. Se obtiene el valor de la corriente i_x que produce esta fuente en función del parámetro u_x. En este problema, el circuito resultante sería el siguiente:



$$i_x = \frac{u_x}{R_4} + \beta i \qquad i = -\frac{\mu u_x}{R_1 + R_2}$$

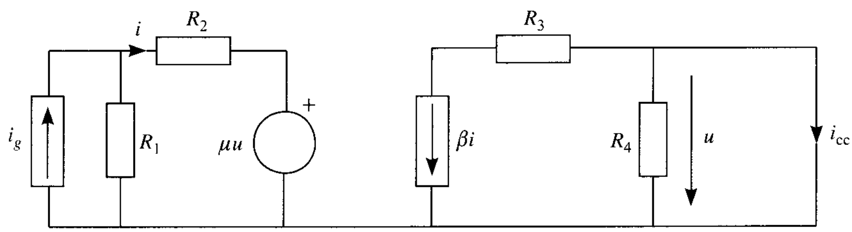
$$i_x = u_x\left(\frac{1}{R_4} - \frac{\beta\mu}{R_1 + R_2}\right)$$

La resistencia Thévenin es el cociente entre u_x e i_x. Se puede definir como la tensión que suministraría una fuente de corriente de 1 A de valor en el circuito estudiado, pero pasivo (sin fuentes independientes). En este caso:

$$\boxed{R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_4} - \dfrac{\beta\mu}{R_1 + R_2}} = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 - \beta\mu R_4}}$$

Aunque no es necesario, se va a obtener el valor de la corriente de cortocircuito con el fin de verificar si los cálculos previos son correctos. El que coincidan los dos resultados, es una condición necesaria, no suficiente, para que los cálculos sean correctos.

Para hallar la corriente de cortocircuito, es necesario sustituir la resistencia R por una resistencia nula, o cortocircuito. El circuito resultante será:



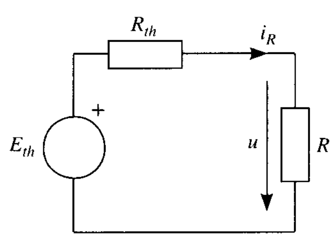
y el valor de la corriente de cortocircuito i_{cc} será, aplicando la fórmula del divisor de intensidad,

$$\boxed{i_{cc} = -\beta \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_g}$$

Comprobación:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{\dfrac{-R_1R_4\beta i_g}{R_1 + R_2 - R_4\mu\beta}}{\dfrac{-\beta R_1}{R_1 + R_2} i_g} = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 - R_4\mu\beta}$$

Una vez obtenido el equivalente Thévenin, se puede sustituir todo el circuito al que está conectada la resistencia R, puesto que la relación entre tensión y corriente del circuito y su equivalente es la misma. Esto hace que el circuito se pueda dibujar de la forma siguiente:



En este caso, la corriente que circula por la resistencia será:

$$i_R = \frac{E_{th}}{R + R_{th}}$$

Y si se sustituyen los valores, el resultado es:

$$\boxed{i_R = \frac{-R_1 R_4 \beta}{(R_1 + R_2)(R + R_4) - \mu\beta R_4 R}\, i_g}$$

22 El circuito CA de las tres figuras es el mismo y está constituido por fuentes de corriente continua y resistencias. Tomando como datos las potencias de las Figuras 1 y 2, calcular la potencia consumida por la resistencia de 2 Ω de la Figura 3.

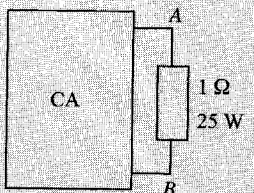


Figura 1

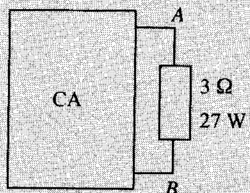


Figura 2

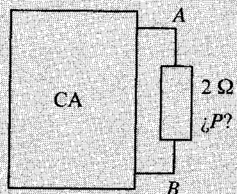
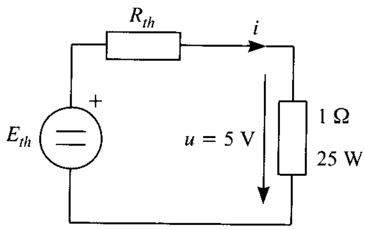


Figura 3

SOLUCIÓN

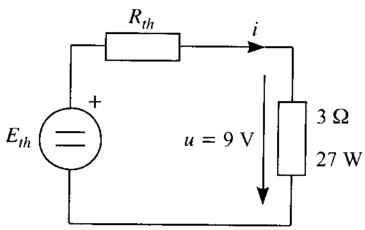
El circuito CA se puede representar por su equivalente Thévenin, cuyos valores hay que determinar a partir de los datos de las Figuras 1 y 2. La representación de la Figura 1 sería:



Puesto que $p = i^2 \cdot R$, $25 = i^2 \cdot 1$, por lo que $i = 5$ A y $u = 5$ V. Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff al circuito, se obtiene la ecuación:

$$E_{th} - R_{th} \cdot 5 = 5$$

En la Figura 2:



Se tiene que $27 = i^2 \cdot 3$, por lo que $i = 3$ A, y $u = 9$ V. Si se aplica en este caso la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la ecuación:

$$E_{th} - R_{th} \cdot 3 = 9$$

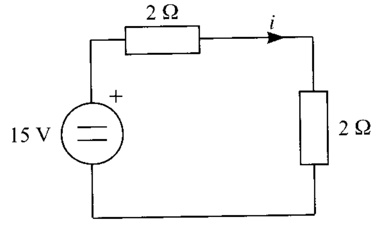
Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$E_{th} - R_{th} \cdot 5 = 5$$
$$E_{th} - R_{th} \cdot 3 = 9$$

cuya solución es:

$$E_{th} = 15\ \text{V}, \qquad R_{th} = 2\ \Omega$$

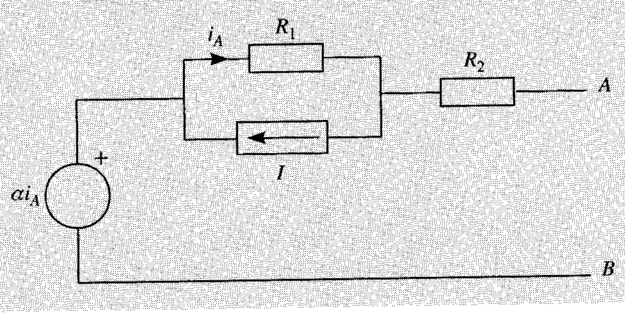
El valor de la potencia se obtiene inmediatamente a partir de la Figura 3, en la que se han sustituido los parámetros del equivalente Thévenin.



$$i = \frac{15}{2+2} = \frac{15}{4}\ \text{A}$$

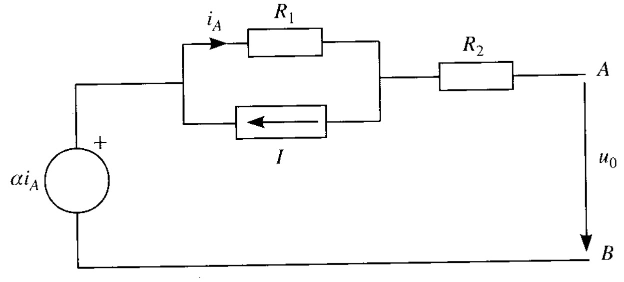
$$p = i^2 R = \left(\frac{15}{4}\right)^2 2 = \frac{225}{8}\ \text{W}$$

1.23. Hallar el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los terminales A y B ($\alpha > 0$).



Solución

Tensión a circuito abierto, u_0:

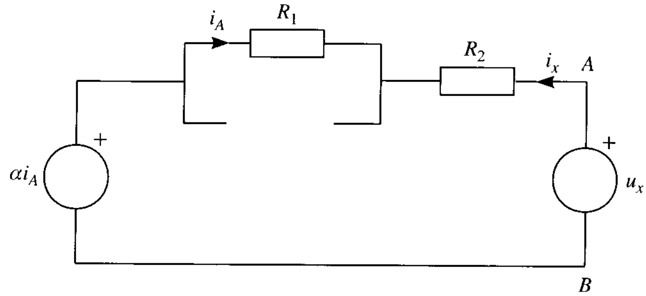


Por la resistencia R_2 no circula corriente al estar abierto el circuito y, por tanto,

$$u_0 = -R_1 i_A + \alpha i_A = (\alpha - R_1) i_A = (\alpha - R_1) I$$

Resistencia Thévenin, R_{th}:

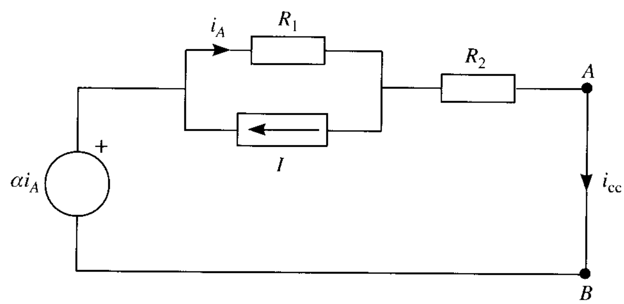
Se anulan las fuentes independientes del circuito, y se conecta entre los terminales A y B una fuente con un valor genérico u_x. El circuito resultante se muestra a continuación.



$$u_x = R_2 i_x + R_1 i_x - \alpha i_x = (R_2 + R_1 - \alpha) i_x$$

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = R_1 + R_2 - \alpha$$

Corriente de cortocircuito, i_{cc}:



Por la primera ley de Kirchhoff:

$$i_{cc} = i_A - \mathrm{I} \qquad (1)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff:

$$\alpha i_A = i_A R_1 + i_{cc} R_2 \qquad (2)$$

Se despeja i_A de (1) y se sustituye en (2):

$$(\alpha - R_1)(i_{cc} + I) = i_{cc} R_2$$
$$(\alpha - R_1) I = (R_1 + R_2 - \alpha) i_{cc}$$

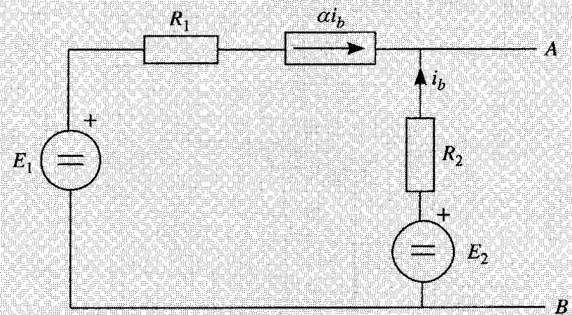
La corriente de cortocircuito es, por tanto:

$$i_{cc} = \frac{\alpha - R_1}{R_1 + R_2 - \alpha} I$$

Comprobación:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{(\alpha - R_1) I}{\dfrac{(\alpha - R_1) I}{R_1 + R_2 - \alpha}} = R_1 + R_2 - \alpha$$

1.24. Hallar el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los terminales A y B ($\alpha = 1$).



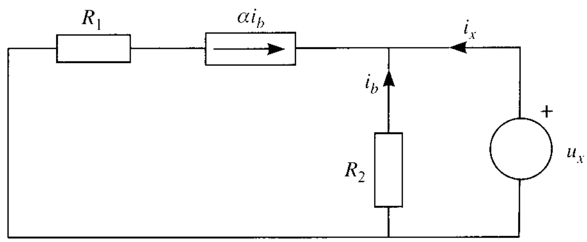
Solución

En primer lugar hay que hallar la tensión a circuito abierto:

$$\alpha i_b = -i_b(\alpha + 1)i_b = 0 \qquad \text{puesto que } \alpha > 0,\ i_b = 0$$

$$u_0 = R_2 \cdot i_b + E_2 = E_2$$

Resistencia Thévenin. Se anulan todas las fuentes independientes y se conecta entre los terminales del circuito una fuente de valor u_x.



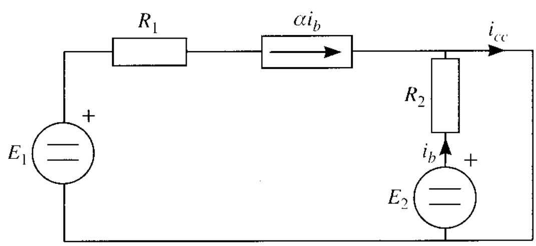
$$i_x = -(i_b + \alpha i_b) = -(\alpha + 1)i_b$$

$$i_b = -\frac{u_x}{R_2}$$

$$i_x = \frac{(\alpha + 1)}{R_2}\, u_x$$

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{R_2}{\alpha + 1}$$

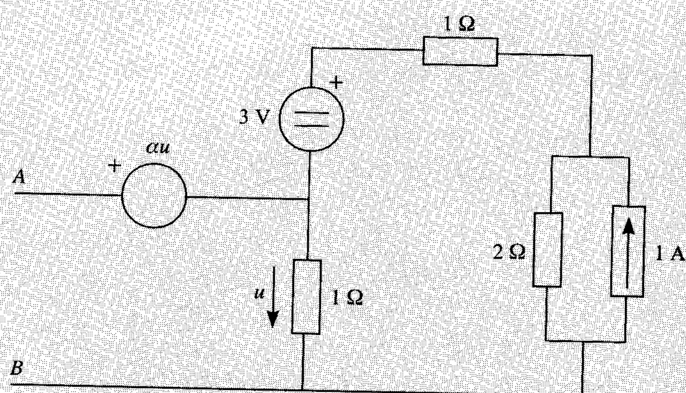
Se comprueba obteniendo la corriente de cortocircuito:



$$i_{cc} = \alpha i_b + i_b = (\alpha + 1)i_b = (\alpha + 1)\,\frac{E_2}{R_2}$$

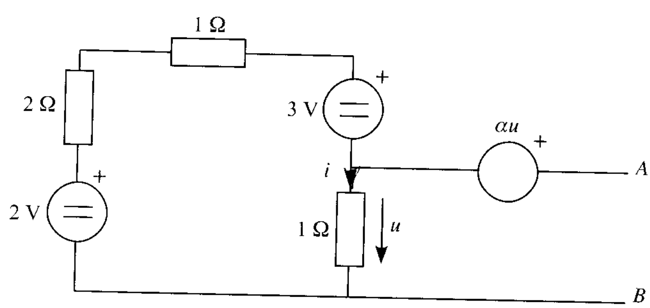
$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{E_2}{(\alpha + 1)\,\dfrac{E_2}{R_2}} = \frac{R_2}{1 + \alpha}$$

Hallar el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los terminales A y B ($\alpha = 1$)



SOLUCIÓN

Tensión a circuito abierto:



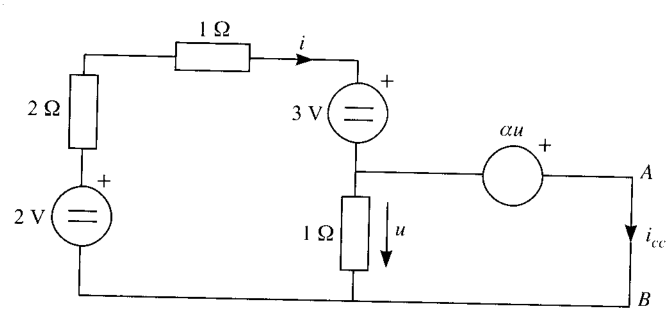
Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$$u_{AB} = \alpha u + u = (\alpha + 1)u = (\alpha + 1)i$$

$$(1 + 2 + 1)i = 2 - 3$$

$$i = -\frac{1}{4}\text{ A} \qquad u_{AB} = E_{th} = -\frac{1}{2}\text{ V}$$

Corriente de cortocircuito:



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la segunda malla:

$$\alpha u + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

Pero si $u = 0$, $i_{cc} = i$. Aplicando de nuevo la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla:

$$(1 + 2)i = 2 - 3$$

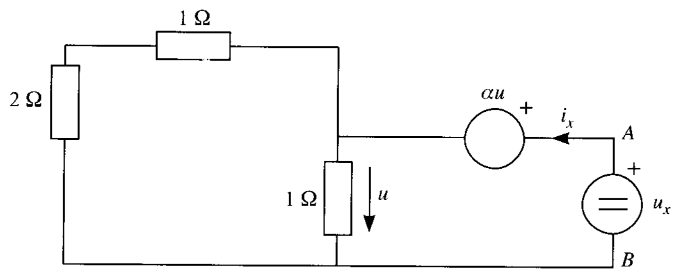
de donde

$$i_{cc} = -\frac{1}{3}\text{ A}$$

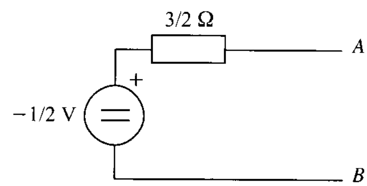
Cálculo de la resistencia Thévenin:

$$u_x = (\alpha + 1)\cdot u = 2u$$

$$i_x = \frac{u}{1} + \frac{u}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{u_x}{2} \quad \Rightarrow \quad R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{3}{2}\ \Omega$$

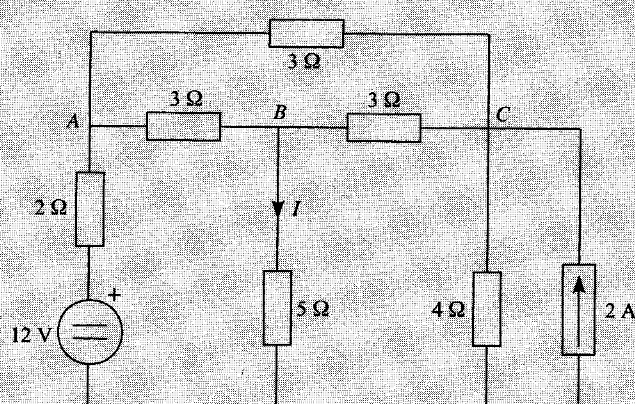


Equivalente Thévenin resultante:



1.26. Analizar por el método de nudos el circuito de la figura y como aplicación hallar la intensidad I y las potencias cedidas por las fuentes ideales.

Nota: se valorará la reducción de los elementos pasivos por transformación triángulo-estrella y elementos en serie o paralelo.



SOLUCIÓN

Método I

Transformación del triángulo ABC en su estrella equivalente:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} = \frac{3\ \Omega}{3} = 1\ \Omega$$

Sea N el centro de la estrella. El circuito equivalente después de la transformación se muestra en la Figura 1.

Se asocian ahora en serie las resistencias de 1 Ω y 5 Ω ($R_{eq} = 1 + 5 = 6\ \Omega$), por un lado, y las de 1 Ω y 2 Ω ($R_{eq} = 1 + 2 = 3\ \Omega$), por otro. El circuito resultante es el de la Figura 2.

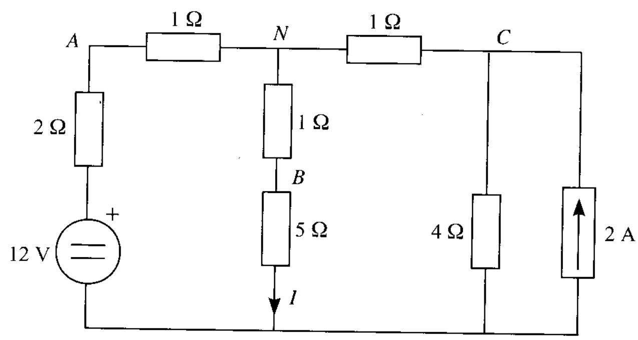


Figura 1

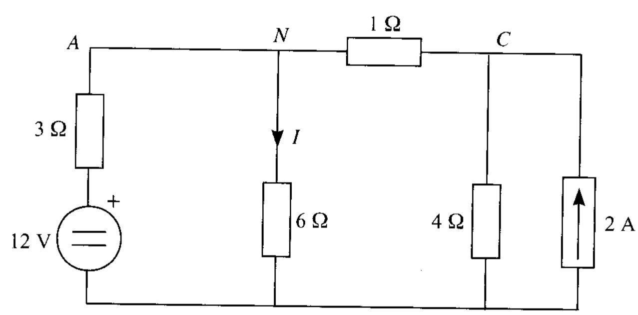


Figura 2

Para aplicar el método de nudos interesa que todas las fuentes independientes del circuito sean fuentes de corriente, por tanto, se transforman la fuente de tensión real en una fuente de corriente real de valor $I_g = \dfrac{12\ \text{V}}{3\ \Omega} = 4$ A. Se asocian en paralelo las resistencias de 3 Ω y 6 Ω:

$$R'_{eq} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2\ \Omega$$

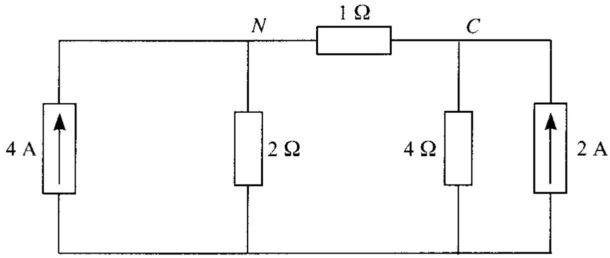


Figura 3

El circuito ya está preparado para aplicar el método de nudos a los nudos N y C. Las ecuaciones de nudos en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 1 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cuya solución es $u_N = u_C = 8$ V.

La intensidad I se puede calcular a partir de la tensión u_N, pues de la Figura 2:

$$\mathrm{I} = \frac{u_N}{6\ \Omega} = \frac{8\ \mathrm{V}}{6\ \Omega} = \frac{4}{3}\ \mathrm{A}$$

Una vez conocidas las tensiones en los nudos N y C y la corriente I, se puede calcular la corriente y la tensión en cada elemento. En el circuito de la Figura 1:

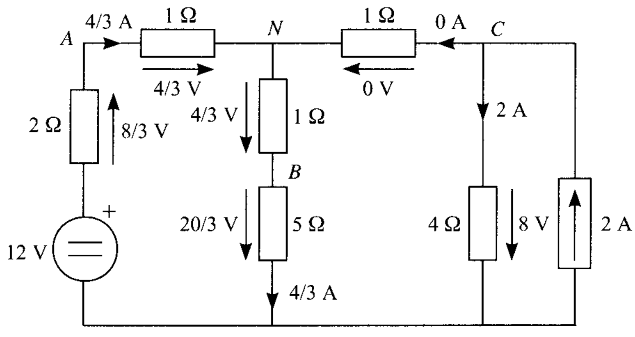


Figura 4

En este circuito $u_A = 12\ \mathrm{V} - 2\ \Omega \cdot 4/3\ \mathrm{A} = 28/3\ \mathrm{V}$, $u_B = 20/3$ V y $u_C = 8$ V. A partir de estas tensiones es posible hallar las corrientes del triángulo:

$$i_{AC} = \frac{u_A - u_C}{3\ \Omega} = \frac{28/3 - 8}{3} = \frac{4}{9}\ \mathrm{A}$$

$$i_{AB} = \frac{u_A - u_B}{3\ \Omega} = \frac{28/3 - - 20/3}{3} = \frac{8}{9}\ \mathrm{A}$$

$$i_{BC} = \frac{u_B - u_C}{3\ \Omega} = \frac{20/3 - 8}{3} = -\frac{4}{9}\ \mathrm{A}$$

Y las tensiones y corrientes en el circuito original se muestran en la Figura 5.

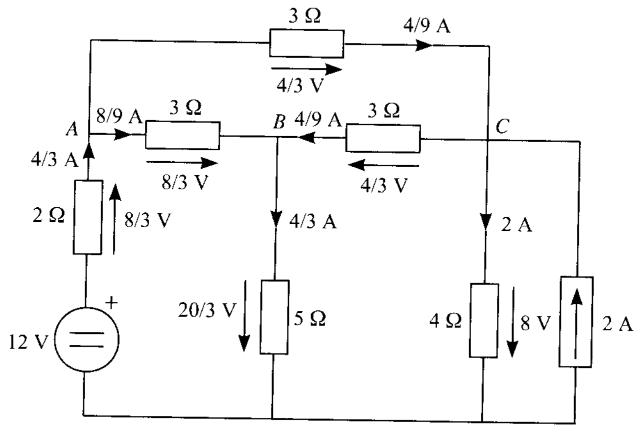


Figura 5

Balance de potencias:

Potencias generadas por las fuentes

$$P_V = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16 \text{ W}$$

$$P_I = 8 \cdot 2 = 16 \text{ W}$$

$$\Sigma P_g = P_V + P_I = 16 + 16 = 32 \text{ W}$$

Potencias consumidas en las resistencias

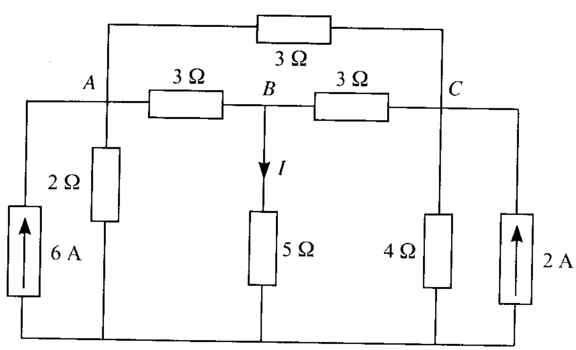
$$\Sigma P_c = 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{8}{9}\right)^2 + 3\left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3\left(\frac{4}{9}\right)^2 + 5\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot 2^2 =$$

$$= \frac{96}{27} + \frac{64}{27} + \frac{16}{27} + \frac{16}{27} + \frac{240}{27} + 16 = 32 \text{ W}$$

Método II

Resolución por el método de nudos de forma directa (sin transformar el triángulo en su estrella equivalente).

Para aplicar el método de nudos es necesario que todas las fuentes independientes sean fuentes de corriente. Se transforma la fuente de tensión en fuente de intensidad:



Las ecuaciones de nudos en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Operando:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_A = \dfrac{28}{3}\ \text{V} \\ u_B = \dfrac{20}{3}\ \text{V} \\ u_C = 8\ \text{V} \end{cases}$$

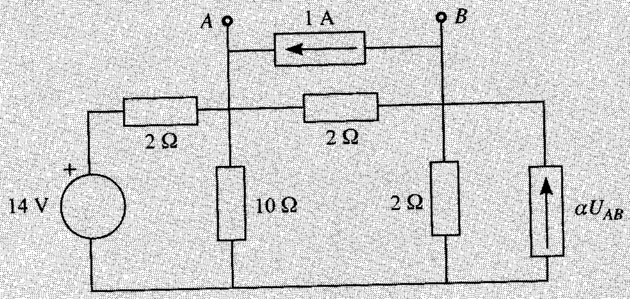
Y la intensidad I se calcula como:

$$I = \frac{u_B}{5\ \Omega} = \frac{20/3\ \text{V}}{5\ \Omega} = \frac{4}{3}\ \text{A}$$

1.27. En el circuito de la figura:

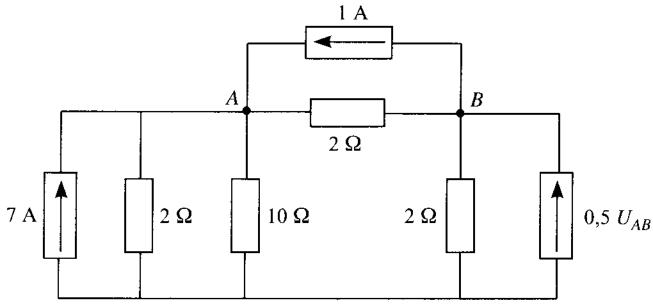
a) Analizar el circuito por el método de los nudos, con $\alpha = 0{,}5$ y dar las intensidades en las fuentes de tensión y las tensiones de las fuentes de intensidad.

b) Hallar el equivalente Thévenin del circuito en los terminales A y B.



SOLUCIÓN

a) Para aplicar el método de nudos se transforma la fuente de tensión real en fuente de corriente real:



Las ecuaciones son:

$$u_A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right)-u_B\,\frac{1}{2}=7+1$$

$$-u_A\,\frac{1}{2}+u_B\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0{,}5U_{AB}-1$$

Pero $U_{AB}=u_A-u_B$. Al sustituirlo en la segunda ecuación, el sistema queda

$$\frac{11}{10}\,u_A-\frac{1}{2}\,u_B=8$$

$$-u_A+\frac{3}{2}\,u_B=-1$$

cuya solución es:

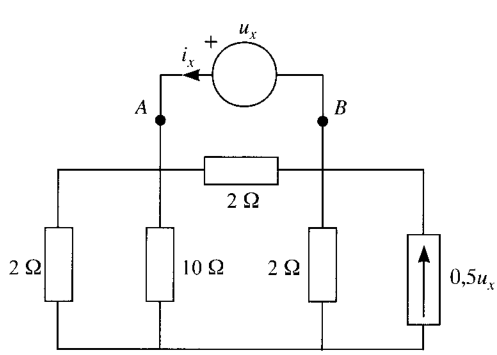
$$u_A=10\text{ V},\ u_B=6\text{ V},\ U_{AB}=10-6=4\text{ V}$$

La tensión en la fuente de corriente independiente es $U_{AB}=4$ V, y la tensión en la fuente de corriente dependiente es $u_B=6$ V. Por otra parte, la corriente en la fuente de tensión es:

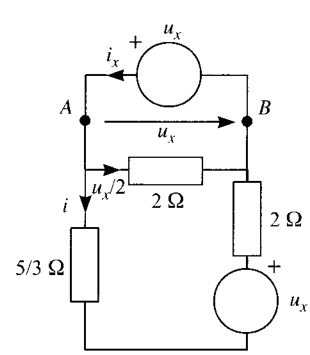
$$i_V=\frac{14\text{ V}-u_A}{2\ \Omega}=\frac{14-10}{2}=2\text{A}$$

b) Para hallar el equivalente Thévenin del circuito en los terminales A y B, es necesario conocer la tensión a circuito abierto, u_0, y la resistencia Thévenin. Pero la tensión a circuito abierto es precisamente $U_{AB}=4$ V.

Para calcular la resistencia Thévenin se anulan todas las fuentes independientes, se conecta una fuente de tensión u_x entre A y B, y se calcula la corriente i_x de la fuente en función de u_x. Para ello, se asocian en paralelo las resistencias de 2 y 10 Ω, y se convierte la fuente de corriente real en fuente de tensión:



$\Rightarrow$



Por la primera ley de Kirchhoff:

$$i_x = i + \frac{u_x}{2} \quad \Rightarrow \quad i = i_x - \frac{u_x}{2} \qquad (1)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff:

$$u_x - 2i + u_x - \frac{5}{3}\,i = 0$$

$$2u_x = \left(2 + \frac{5}{3}\right)i = \frac{11}{3}\,i \qquad (2)$$

Se sustituye en (2) el valor de i dado por (1):

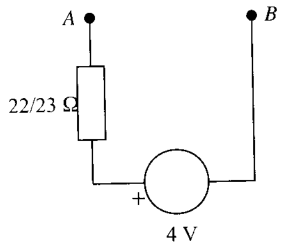
$$2u_x = \frac{11}{3}\left(i_x - \frac{u_x}{2}\right)$$

$$\left(2 + \frac{11}{6}\right)u_x = \frac{11}{3}\,i_x$$

Por tanto, la resistencia Thévenin es:

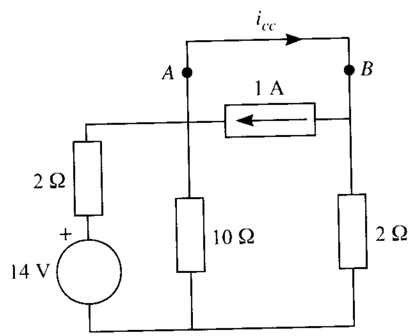
$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{11/3}{11/6 + 2} = \frac{22}{23}\ \Omega$$

El equivalente Thévenin buscado se muestra en la figura:



Como comprobación se puede calcular la corriente de cortocircuito, i_{cc}:

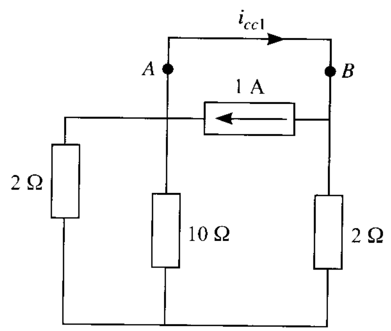
Al cortocircuitar los terminales A y B, la tensión $U_{AB} = 0$ V y, por tanto, la fuente corriente dependiente de dicha tensión se anula. Por otra parte, la resistencia de 2 Ω entre B tiene tensión cero y corriente cero, por tanto se puede eliminar. El circuito resultante muestra a continuación:

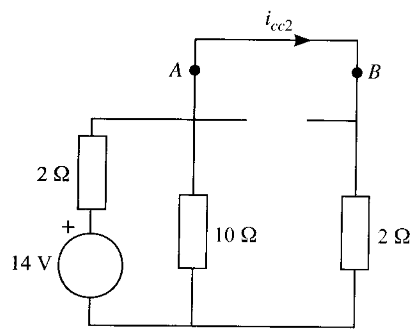


Se calcula i_{cc} aplicando el principio de superposición:

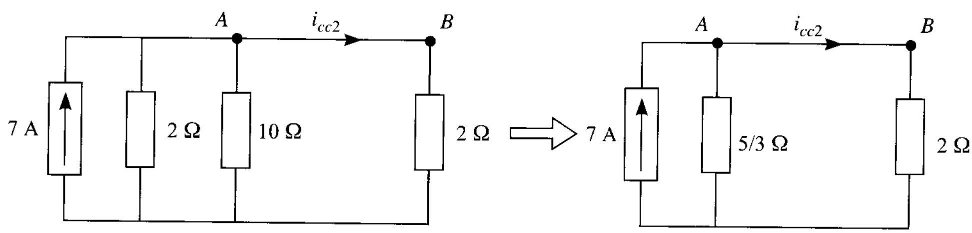
$$i_{cc} = i_{cc1} + i_{cc2}$$

siendo i_{cc1} la corriente de cortocircuito entre A y B cuando sólo actúa la fuente de corriente e i_{cc2} la corriente de cortocircuito entre A y B cuando actúa la fuente de tensión.

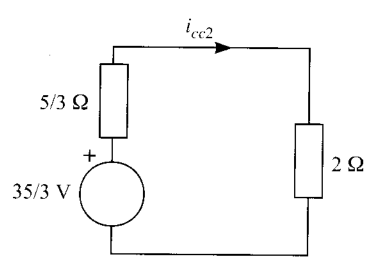




En el primer circuito, $i_{cc1} = 1$ A. Para hallar i_{cc2} en el segundo circuito, se transforma la fuente de tensión real en fuente de corriente real, y se asocian las resistencias en paralelo:



Se transforma ahora la fuente de corriente real en fuente de tensión real:



$$i_{cc2} = \frac{35/3}{5/3 + 2} = \frac{35}{11} \text{ A}$$

$$i_{cc} = i_{cc1} + i_{cc2} = 1 + \frac{35}{11} = \frac{46}{11} \text{ A}$$

Y por tanto:

$$R_{th} = \frac{4}{46/11} = \frac{44}{26} = \frac{22}{23}\ \Omega$$

como se esperaba.

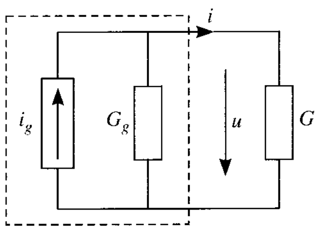
1.28. Una fuente de intensidad real de corriente continua alimenta a una conductancia G. Si lo parámetros de la fuente real son I_g y G_g determinar:

a) La potencia absorbida por la conductancia G en función de I_g, G_g y G.

b) Deducir el valor de G para que la potencia suministrada por la fuente real sea máxim y calcular su valor.

SOLUCIÓN

a) El esquema del circuito se muestra en la figura:



Las expresiones de tensión, corriente y potencia en la conductancia G son:

$$u = \frac{i_g}{G + G_g}, \qquad i = G \cdot u = G \cdot \frac{i_g}{G + G_g}, \qquad p = u \cdot i = G \cdot \left(\frac{i_g}{G + G_g}\right)^2$$

b) Para obtener el valor de G que hace máxima la potencia, se deriva ésta en función de y se iguala a cero:

$$\frac{dp}{dG} = \left(\frac{i_g}{G + G_g}\right)^2 - 2G\left(\frac{i_g}{G + G_g}\right) \cdot \frac{i_g}{(G + G_g)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2G}{G + G_g} \quad \Leftrightarrow \quad G = G_g$$

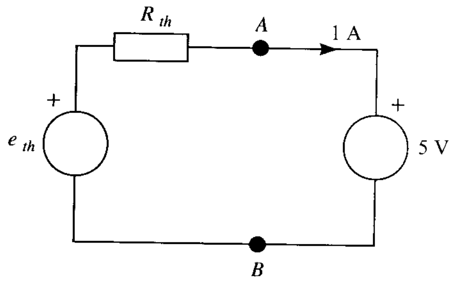
Es decir, la potencia alcanza un máximo para un valor de la conductancia $G = G_g$ y la exp sión de la máxima potencia es la siguiente:

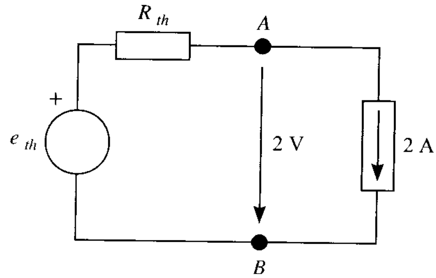
$$p_{\text{máx}} = \frac{i_g^2}{4G_g}$$

1.29. Un circuito activo con dos terminales accesibles A y B está formado sólo por resistencias fuentes de corriente continua. Si se conecta una fuente de tensión ideal $e_{AB} = 5$ V entre lo terminales A y B, circula una intensidad $i_{AB} = 1$ A. Si se conecta una fuente de intensid ideal $i_{AB} = 2$ A ente los terminales A y B, aparece una tensión $u_{AB} = 2$ V.

Determinar el equivalente Thévenin del circuito activo respecto de los terminales y B.

SOLUCIÓN





Para determinar el equivalente Thévenin del circuito activo se deben obtener el valor de la fuente de tensión e_{th} y la resistencia Thévenin, R_{th}.

En el primer caso, cuando se conecta una fuente de tensión de $e_{AB} = 5$ V la corriente $i_{AB} = 1$ A, y se debe satisfacer la ecuación:

$$e_{th} - 5\text{ V} = 1 \cdot R_{th} \qquad (1)$$

En el segundo caso, cuando se conecta una fuente de corriente $i_{AB} = 2$ A, la tensión entre A y B es $u_{AB} = 2$ V, y se debe satisfacer:

$$e_{th} - 2\text{ V} = 2 \cdot R_{th} \qquad (2)$$

Despejando e_{th} de ambas ecuaciones e igualando:

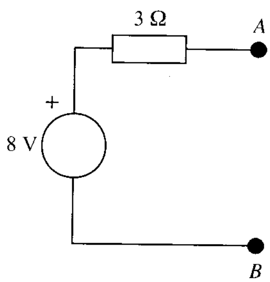
$$R_{th} + 5 = 2R_{th} + 2$$

$$R_{th} = 3\ \Omega$$

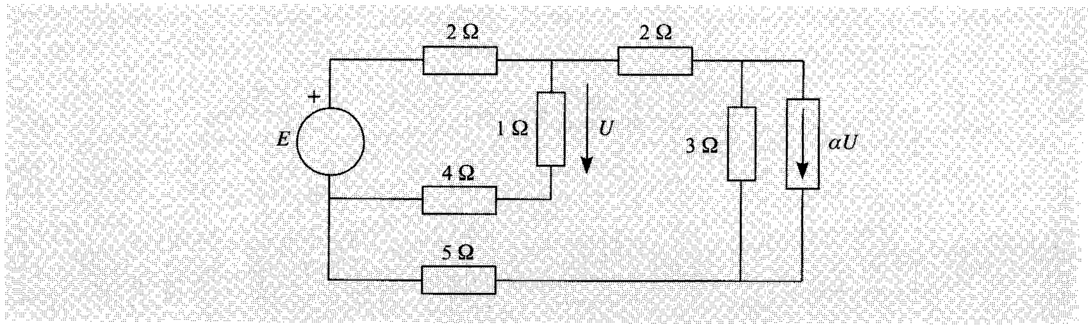
Y sustituyendo en (1):

$$e_{th} = R_{th} + 5 = 3 + 5 = 8\text{ V}$$

Por tanto, el equivalente Thévenin buscado del circuito activo respecto a los terminales A y B es:

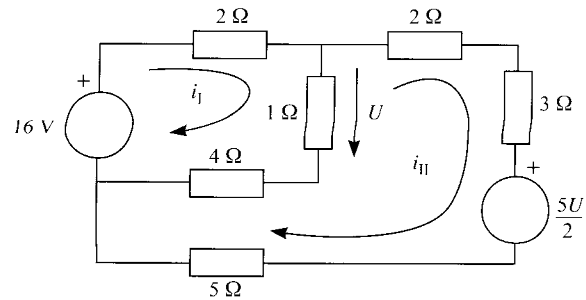


1.30. Analizar el circuito de la figura por el método de mallas, sabiendo que $E = 16$ V y $\alpha = -5/6$, y realizar el balance de potencias del circuito



SOLUCIÓN

Para aplicar el método de mallas se convierte la fuente real de intensidad a fuente de tensión tal como se muestra en la figura, en la que se han sustituido E y α por sus respectivos valores:



Las ecuaciones de las mallas son:

I: $i_I(2 + 1 + 4) - i_{II}(1 + 4) = 16$

II: $i_I(1 + 4) + i_{II}(2 + 3 + 5 + 4 + 1) = -5U/2$

Pero U no es dato. De la figura se tiene que $U = 1(i_I - i_{II})$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, las ecuaciones quedan:

$$7i_I - 5i_{II} = 16$$

$$-5i_I + 15i_{II} = -\frac{5}{2}(i_I - \mathrm{i}_{II})$$

Simplificando:

$$7i_I - 5i_{II} = 16$$

$$-i_I + 5i_{II} = 0$$

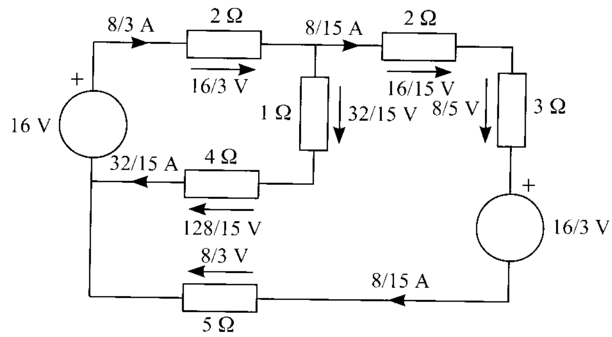
La solución de este sistema es:

$$i_I = \frac{8}{3}\text{ A} \qquad \text{e} \qquad i_{II} = \frac{8}{15}\text{ A}$$

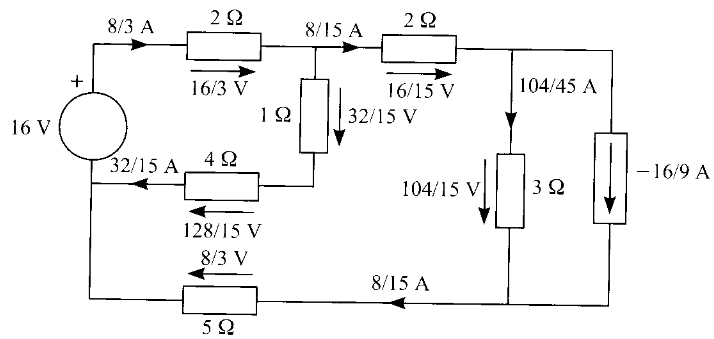
Y la tensión:

$$U = \frac{32}{15}\text{ V}$$

Las tensiones y corrientes se muestran en la figura:



Y en el circuito original:



Balance de potencias:

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = 16 \text{ V} \cdot \frac{8}{3} \text{ A} - \frac{104}{15} \text{ V} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) \text{A} = \frac{128}{3} + \frac{1.664}{135} = \frac{7.424}{135} \simeq 55 \text{ W}$$

Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma P_c = \frac{16}{3} \text{ V} \cdot \frac{8}{3} \text{ A} + \frac{16}{15} \text{ V} \cdot \frac{8}{15} \cdot \text{A} + \frac{104}{15} \text{ V} \cdot \frac{104}{45} \text{ A} + \frac{8}{3} \text{ V} \cdot \frac{8}{15} \text{ A} + \frac{32}{15} \text{ V} \cdot \frac{32}{15} \text{ A} + \frac{128}{15} \text{ V} \cdot \frac{32}{15} \text{ A} =$$

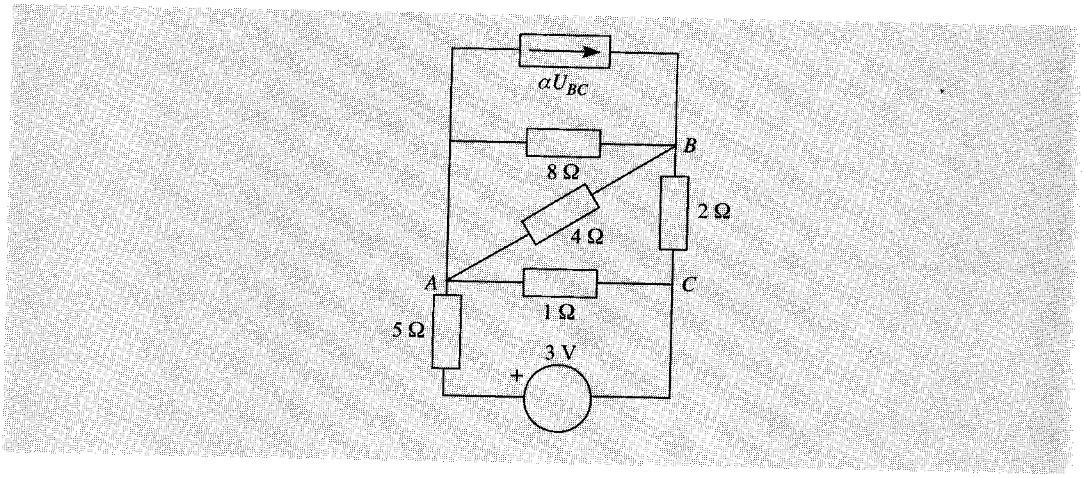
$$= \frac{128}{9} + \frac{128}{225} + \frac{10.816}{675} + \frac{64}{45} + \frac{1.024}{225} + \frac{4.096}{225} \simeq 55 \text{ W}$$

Y se cumple que $\Sigma P_g = \Sigma P_c$.

1 31. En el circuito de la figura:

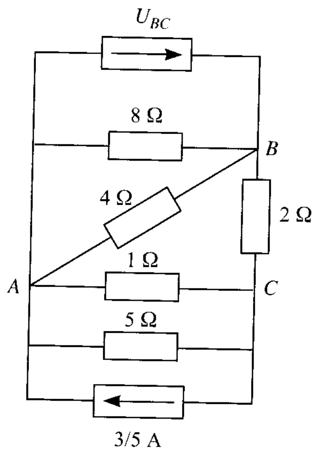
a) Analizar el circuito por el método de los nudos, con $\alpha = 1$ y dar las intensidades en las fuentes de tensión y las tensiones de las fuentes de intensidad.

b) Hallar el equivalente Thévenin del circuito en los terminales A y B.



SOLUCIÓN

a) Para aplicar el método de nudos se convierte la fuente real de tensión en fuente de intensidad de valor $I = 3$ V/5 Ω $= 3/5$ A. En la figura se muestra el resultado después de la transformación. El coeficiente α se ha sustituido por su valor:



Tomando el nudo A como referencia, las ecuaciones en los nudos B y C son:

$$u_B\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - u_C\,\frac{1}{2} = U_{BC}$$

$$-u_B\,\frac{1}{2} + u_C\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}$$

Pero $U_{BC} = u_B - u_C$. Sustituyendo en la primera ecuación y operando, las ecuaciones quedan:

$$u_B - 4u_C = 0$$

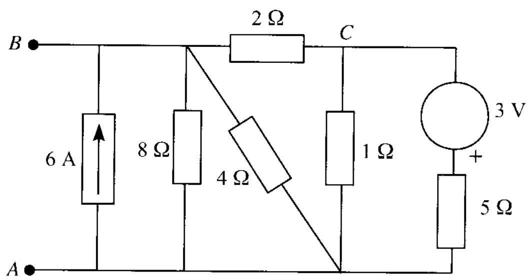
$$-5u_B + 17u_C = -6$$

cuya solución es $u_B = 8$ V y $u_C = 2$ V.

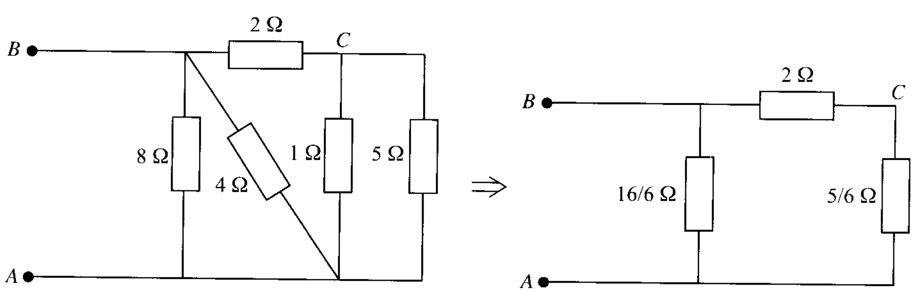
La intensidad de la fuente dependiente es $U_{BC} = u_B - u_C = 8 - 2 = 6$ A y su tensión $u_{BA} = 8$ V . En cuanto a la fuente de tensión, la corriente es:

$$I = \frac{u_C + 3\ \text{V}}{5\ \Omega} = \frac{2+3}{5} = 1\ \text{A}$$

b) Equivalente Thévenin del circuito respecto a los terminales A y B. La tensión Thévenin es la tensión entre A y B a circuito abierto:



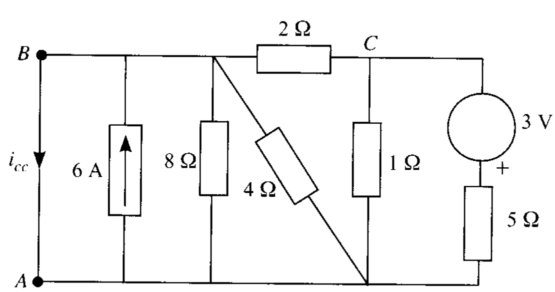
La tensión de vacío es u_{BA} que es la tensión calculada antes $u_B = 8$ V.
Resistencia Thévenin:
Se anulan todas las fuentes independientes y se asocian convenientemente las resistencias.



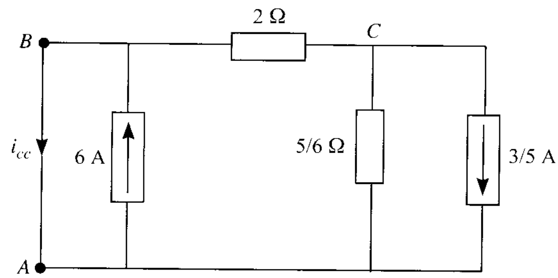
La resistencia Thévenin es, por tanto:

$$R_{th} = \frac{\frac{16}{6}\left(2+\frac{5}{6}\right)}{\frac{16}{6}+\left(2+\frac{5}{6}\right)} = \frac{\frac{16}{6}\cdot\frac{17}{6}}{\frac{16}{6}} = \frac{272}{198} = \frac{136}{99}\ \Omega$$

Como comprobación se calcula la corriente de cortocircuito:



Este circuito es equivalente al siguiente:



Aplicando el método de nudos:

$$\frac{1}{2}u_B - \frac{1}{2}u_C = 6 - i_{cc}$$

$$-\frac{1}{2}u_B + \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{5}\right)u_C = -\frac{3}{5}$$

Pero $u_B = 0$, por estar B en cortocircuito con A. Luego las ecuaciones quedan:

$$-\frac{1}{2}u_C = 6 - i_{cc}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{6}{5}\right)u_C = -\frac{3}{5}$$

De la segunda ecuación:

$$u_C = -\frac{-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{5}} = \frac{-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{17}{10}} = -\frac{6}{17}\text{ V}$$

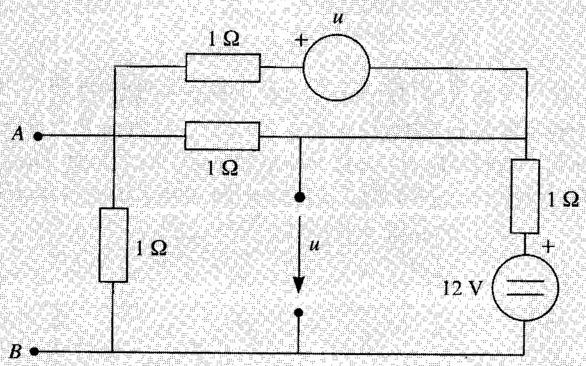
Entrando con este valor de u_C en la primera ecuación:

$$i_{cc} = 6 + \frac{1}{2}u_c = 6 - \frac{3}{17} = \frac{99}{17}\text{ A}$$

Y la resistencia Thévenin:

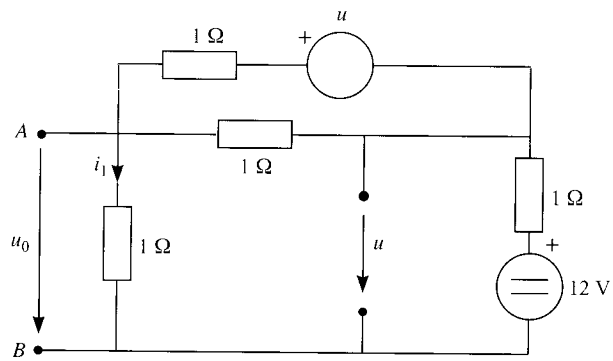
$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{8}{\dfrac{99}{17}} = \frac{136}{99}\ \Omega$$

32. Obtener el equivalente Thévenin del circuito con respecto a los puntos A y B.



SOLUCIÓN

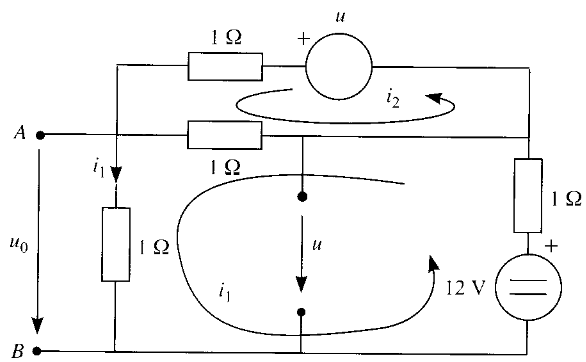
Tensión a circuito abierto u_0:



La tensión a circuito abierto, u_0, es precisamente la tensión entre los terminales A y B:

$$u_0 = 1 \cdot i_1$$

El valor de i_1 se puede obtener aplicando el método de mallas:



$$(1 + 1 + 1)i_1 - 1 \cdot i_2 = 12 \qquad (1)$$

$$-1 \cdot i_1 + (1 + 1)i_2 = u \qquad (2)$$

Pero por la segunda ley de Kirchhoff:

$$u = 12 \text{ V} - 1 \cdot i_1$$

Al sustituir este valor de u en (2), y simplificar, el sistema de ecuaciones queda como sigue:

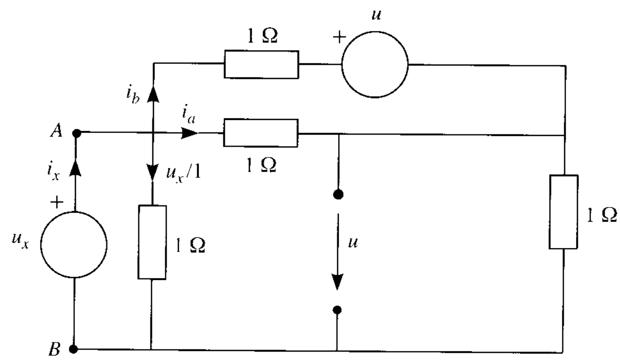
$$3i_1 - i_2 = 12$$
$$2i_2 = 12$$

Por tanto $i_1 = i_2 = 6$ A, y la tensión de vacío es $u_0 = i_1 \cdot 1 = 6$ V.

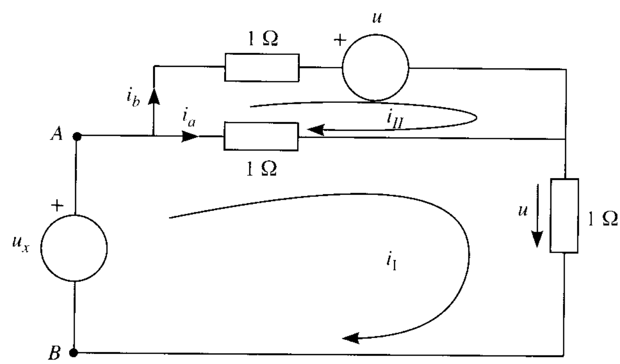
Resistencia Thévenin, R_{th}:

Se anula la fuente independiente de tensión y se conecta una fuente entre A y B de valor u_x. Se calcula la corriente i_x en dicha fuente de tensión en función de u_x:

$$i_x = \frac{u_x}{1} + i_a + i_b$$



Los valores de i_a e i_b se pueden obtener aplicando el método de mallas al circuito equivalente:



De la figura:

$$i_a = i_I - i_{II}$$
$$i_b = i_{II}$$

Las ecuaciones de cada malla son:

$$2i_I - i_{II} = u_x$$
$$-i_I + 2i_{II} = -u$$

Pero la tensión $u = 1 \cdot i_I$, al sustituirla en la segunda ecuación se tiene que

$$i_{II} = 0 \quad \text{e} \quad i_I = \frac{u_x}{2}$$

Por tanto:

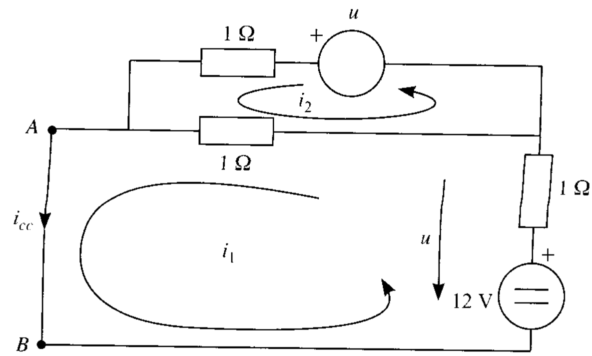
$$i_x = \frac{u_x}{1} + i_I - i_{II} + i_{II} = u_x + \frac{u_x}{2} = \frac{3}{2}\, u_x$$

La resistencia Thévenin es:

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{2}{3}\ \Omega$$

Como comprobación se calcula la corriente de cortocircuito, i_{cc}:

Al cortocircuitar los terminales A y B, el circuito resultante es:



en el que $i_{cc} = i_1$. Se resuelve por el método de mallas:

$$2 \cdot i_1 - i_2 = 12$$

$$-i_1 + 2 \cdot i_2 = u$$

Pero

$$u = 12 - i_1$$

luego

$$i_2 = 6\ \text{A} \quad \text{e} \quad i_1 = 9\ \text{A}$$

y, por tanto,

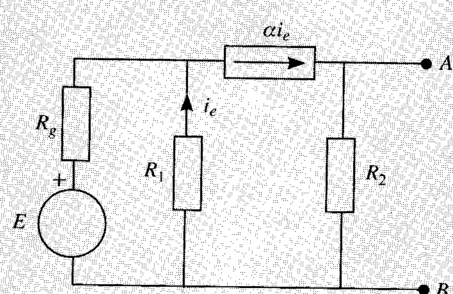
$$i_{cc} = 9\ \text{A}$$

La resistencia Thévenin, calculada a partir de la tensión de vacío y de la corriente de cortocircuito, es:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\ \Omega$$

como se esperaba.

1.33 En el circuito de la figura hallar los equivalentes Thévenin y Norton respecto a los terminales A-B. Comprobar el resultado.

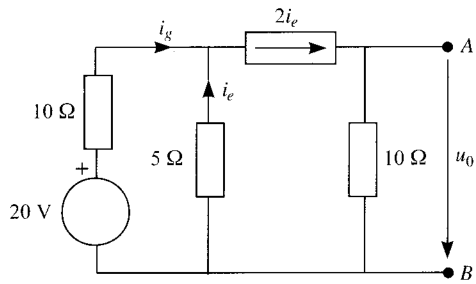


Datos: $E = 20$ V; $\alpha = 2$; $R_g = 10\ \Omega$; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.

SOLUCIÓN

Tensión a circuito abierto:

$$u_0 = \alpha \cdot i_e \cdot R_2 = 20 i_e$$



Pero i_e no es dato. Se calcula aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$i_g = 2 \cdot i_e - i_e = i_e \qquad \text{(Primera ley de Kirchhoff)}$$

$$20 - 10 \cdot i_g = -5 \cdot i_e \qquad \text{(Segunda ley de Kirchhoff)}$$

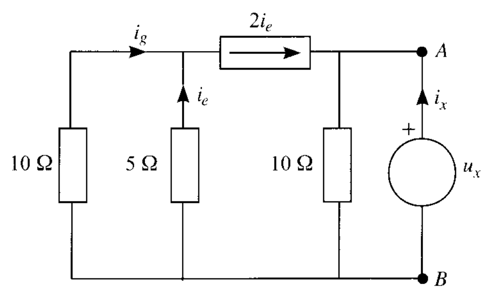
Sustituyendo en esta ecuación el valor de i_g dado por la ecuación anterior:

$$20 = 5 \cdot i_e$$

Por tanto:

$$i_e = 4 \text{ A} \quad \text{y} \quad u_0 = 80 \text{ V}$$

Resistencia Thévenin:



$$i_g = 2i_e - i_e = i_e \qquad (1)$$

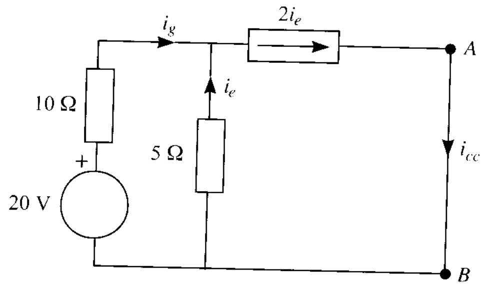
$$i_x = \frac{u_x}{10} - 2i_e \qquad (2)$$

$$10 i_g = 5 i_e \qquad (3)$$

De (1) y (3), $i_g = i_e = 0$. Por tanto, de (2):

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = 10 \ \Omega$$

Corriente de cortocircuito:



Aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$i_{cc} = 2i_e$$
$$i_g = 2i_e - i_e = i_e$$
$$20 - 10i_g = -5i_e$$

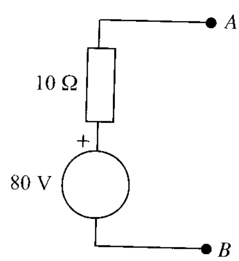
La solución a este sistema es:

$$i_g = i_e = 4 \text{ A}$$
$$i_{cc} = 8 \text{ A}$$

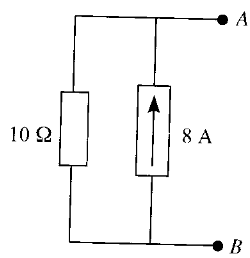
Se puede comprobar que

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{80}{8} = 10\ \Omega$$

y los equivalentes buscados son:



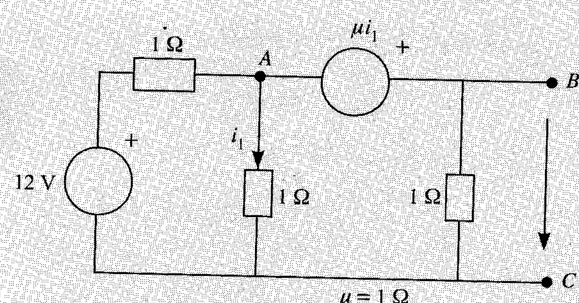
Equivalente Thévenin



Equivalente Norton

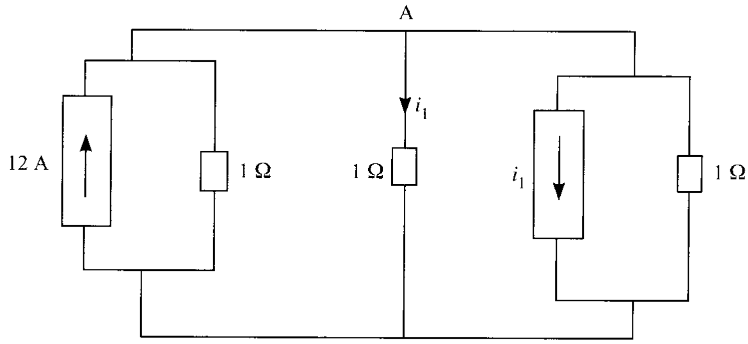
1.34 En el circuito de la figura realizar:

1. Análisis por nudos del circuito.
2. Balance de potencias de todos los elementos.
3. Equivalente Thévenin desde los terminales B y C.



SOLUCIÓN

1. Al transformar la fuente dependiente de tensión en serie con una resistencia de 1 Ω, en una fuente de corriente en paralelo con la misma resistencia, se obtiene el siguiente circuito:



Su análisis es muy sencillo puesto que sólo hay un nudo, y por tanto, sólo una ecuación.

$$(1 + 1 + 1)u_A = 12 - i_1$$

Pero $i_1 = u_A$ luego:

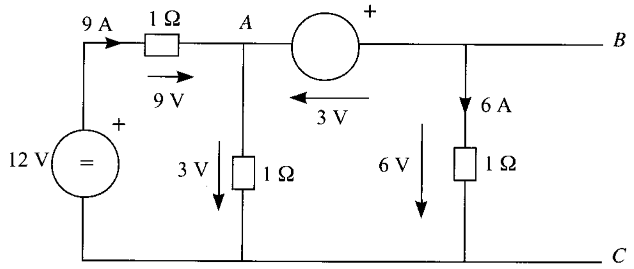
$$4u_A = 12$$

de donde

$$u_A = 3 \text{ V}$$

$$i_1 = 3 \text{ A}$$

Las tensiones y corrientes en todos los elementos del circuito se muestran en la figura siguiente:



2. Balance de potencias:

Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma\, P_c = 9^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 1 = 126 \text{ W}$$

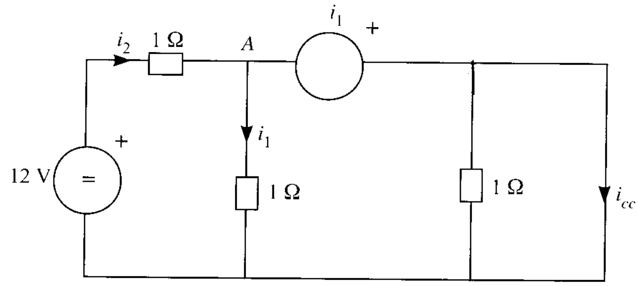
Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma\, P_g = 12 \cdot 9 + 3 \cdot 6 = 126 \text{ W}$$

3. Equivalente Thévenin:

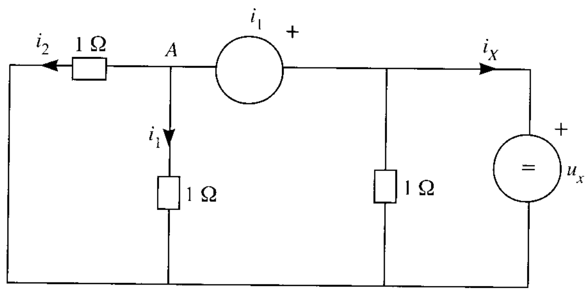
La tensión de vacío es u_0, es decir, $E_{th} = u_{BC} = 6$ V.

Para hallar la corriente de cortocircuito se analiza el siguiente circuito:



$i_{cc} = i_2 - i_1$
$i_2 = 12 - i_1$
$i_1 + i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0$ A; $\quad i_2 = 12$ A $\qquad i_{cc} = 12$ A

El cálculo de la resistencia Thévenin se realiza mediante el análisis del siguiente circuito, en el que se han anulado todas las fuentes independientes, y se ha incluido una fuente de valor u_x.



$i_x = u_x + i_1 + i_2$ (Aplicando la primera ley de Kirchhoff al circuito)
$i_1 = i_2$ (Ambas están a la misma tensión, y las resistencias respectivas tienen el mismo valor)
$u_x = i_1 + i_1 = 2i_1$ (Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito)

De estas ecuaciones se obtiene:

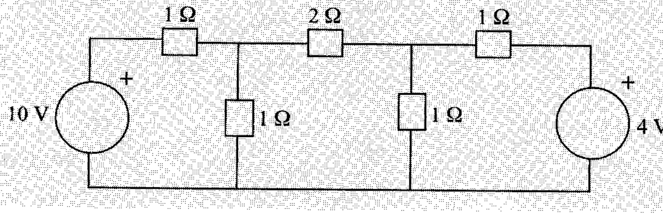
$$i_x = 2u_x$$

que da, a su vez, un valor de la resistencia Thévenin

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{1}{2}\ \Omega$$

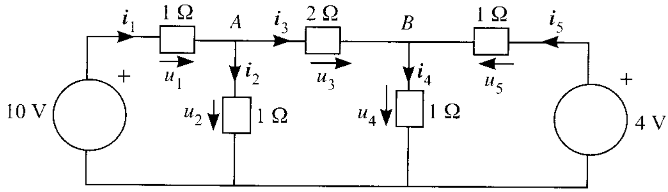
resultado que concuerda con el cociente entre la tensión de vacío y la corriente de cortocircuito.

1.35. Analizar por aplicación de las leyes de Kirchhoff el circuito de la figura, escribiendo las ecuaciones de los nudos y de las mallas.



SOLUCIÓN

Las incógnitas son las intensidades i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 y las tensiones u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 en las resistencias, como muestra la figura siguiente:



Primera ley de Kirchhoff a los nudos A y B:

Nudo A: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

Nudo B: $i_3 - i_4 + i_5 = 0$

Segunda ley de Kirchhoff a las tres mallas:

$$u_1 + u_2 - 10 = 0$$
$$-u_2 + u_3 + u_4 = 0$$
$$-u_4 - u_5 + 4 = 0$$

Se tienen 5 ecuaciones para 10 incógnitas. Se necesitan 5 ecuaciones más que son las relaciones entre tensiones y corrientes (ley de Ohm):

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{u_2}{R_2}, \qquad i_3 = \frac{u_3}{R_3}, \qquad i_4 = \frac{u_4}{R_4}, \qquad i_5 = \frac{u_5}{R_5}$$

Se despejan las tensiones u_1, u_3 y u_5 en función de u_2 y u_4:

$$u_1 = 10 - u_2$$
$$u_3 = u_2 - u_4$$
$$u_5 = 4 - u_4$$

De la primera ley de Kirchhoff y de la ley de Ohm:

$$\frac{10 - u_2}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_4}{R_3} = 0$$

$$\frac{u_2 - u_4}{R_3} - \frac{u_4}{R_4} + \frac{4 - u_4}{R_5} = 0$$

Sustituyendo los valores de las resistencias y simplificando, se llega al siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5u_2 - u_4 &= 20 \\ -u_2 + 5u_4 &= \ \ 8 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

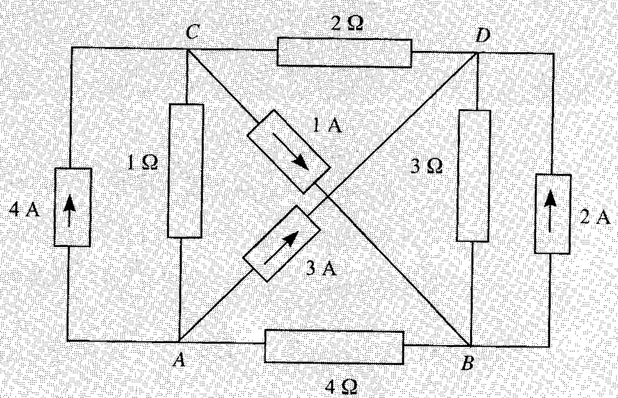
$$u_2 = \frac{9}{2}\text{ V} \qquad \text{y} \qquad u_4 = \frac{5}{2}\text{ V}$$

Las demás tensiones e intensidades valen:

$$u_1 = \frac{11}{2}\ \text{V}, \qquad u_3 = 2\ \text{V}, \qquad u_5 = \frac{3}{2}\ \text{V}$$

$$i_1 = \frac{11}{2}\ \text{A}, \qquad i_2 = \frac{9}{2}\ \text{A}, \qquad i_3 = 1\ \text{A}, \qquad i_4 = \frac{5}{2}\ \text{A}, \qquad i_5 = \frac{3}{2}\ \text{A}$$

1.36 Hallar, por el método de análisis de nudos, las intensidades en cada resistencia y las tensiones en las fuentes de intensidad, tomando como nudo de referencia el nudo A.



Solución

Las ecuaciones en los nudos B, C y D, respectivamente, son:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)u_B - \frac{1}{3}\,u_D = 1 - 2$$

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)u_C - \frac{1}{2}\,u_D = 4 - 1$$

$$-\frac{1}{3}\,u_B - \frac{1}{2}\,u_C + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)u_D = 2 + 3$$

que puestas en forma matricial, quedan:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \\ u_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$u_B = 4{,}8\ \text{V}, \qquad u_C = 5{,}8\ \text{V}, \qquad u_D = 11{,}4\ \text{V}$$

A partir de estas tensiones se calculan las tensiones y corrientes en las resistencias:

$$1\ \Omega\text{: } u_{CA} = u_C = 5{,}8\ \text{V} \qquad i_{CA} = \frac{u_{CA}}{1\ \Omega} = \frac{5{,}8}{1} = 5{,}8\ \text{A}$$

$$2\ \Omega\text{: } u_{CD} = u_C - u_D = 5{,}8 - 11{,}4 = -5{,}6\ \text{V} \qquad i_{CD} = \frac{u_{CD}}{2\ \Omega} = \frac{-5{,}6}{2} = -2{,}8\ \text{A}$$

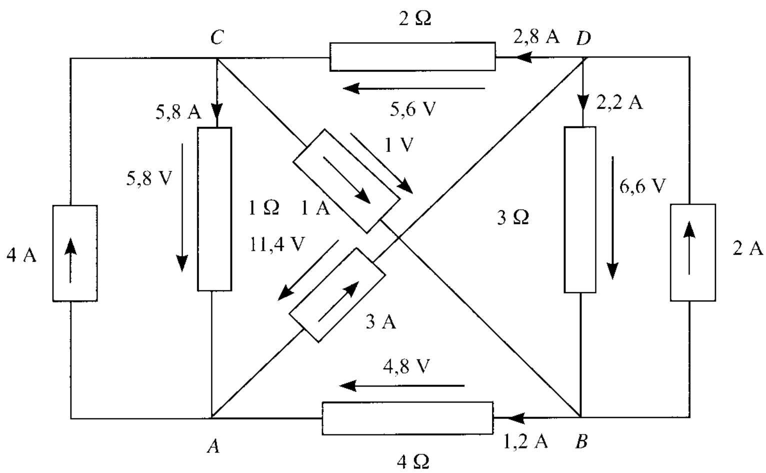
$$3\ \Omega\text{: } u_{BD} = u_B - u_D = 4{,}8 - 11{,}4 = -6{,}6\ \text{V} \qquad i_{BD} = \frac{u_{BD}}{3\ \Omega} = -2{,}2\ \text{A}$$

$$4\ \Omega\text{: } u_{BA} = u_B = 4{,}8\ \text{V} \qquad i_{BA} = \frac{u_{BA}}{4\ \Omega} = \frac{4{,}8}{4} = 1{,}2\ \text{A}$$

y las tensiones en las fuentes de corriente:

$$4\ \text{A: } u_{CA} = 5{,}8\ \text{V}$$
$$3\ \text{A: } u_{DA} = u_D = 11{,}4\ \text{V}$$
$$1\ \text{A: } u_{BC} = u_B - u_C = 4{,}8 - 5{,}8 = -1\ \text{V}$$
$$2\ \text{A: } u_{DB} = u_D - u_B = 11{,}4 - 4{,}8 = 6{,}6\ \text{V}$$

En la figura se muestran todas las tensiones y corrientes.



Se realiza el balance de potencias como comprobación:

Potencias generadas por las fuentes

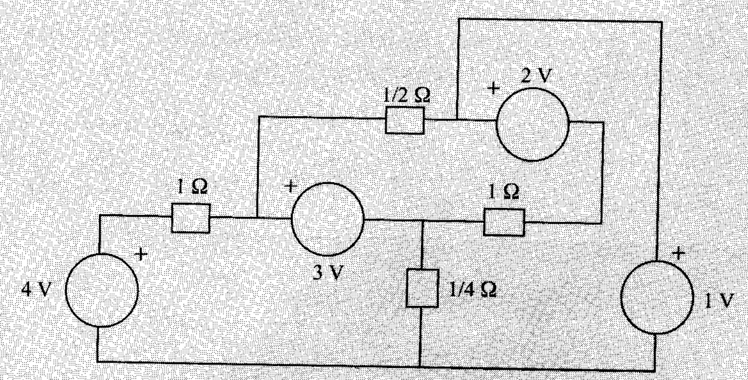
$$\Sigma P_g = 5{,}8\ \text{V} \cdot 4\ \text{A} + 11{,}4\ \text{V} \cdot 3\ \text{A} - 1\ \text{V} \cdot (1)\text{A} + 6{,}6\ \text{V} \cdot 2\text{A} = 69{,}6\ \text{W}$$

Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma P_c = 1 \cdot (5{,}8)^2 + 2 \cdot 2{,}8^2 + 3 \cdot (2{,}2)^2 + 4 \cdot 1{,}2^2 = 69{,}6\ \text{W}$$

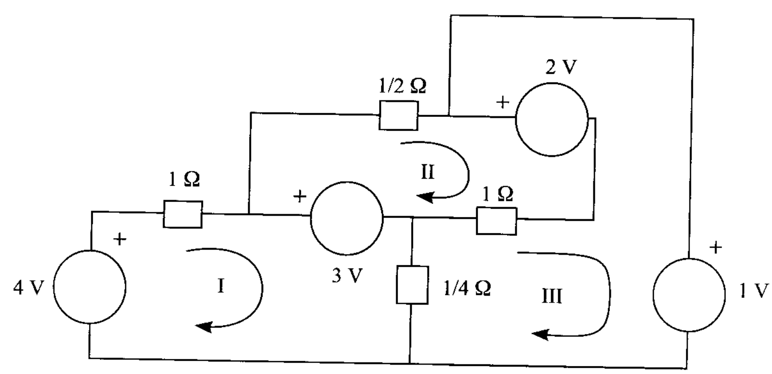
Se cumple que $\Sigma P_g = \Sigma P_c$.

37 Hallar mediante el método de análisis de mallas, la tensión en cada resistencia y la intensidad que circula por cada fuente de tensión.



Solución

Se numeran las mallas como indica la figura:



Se recorre cada malla en sentido horario:

Malla I: $\left(1+\frac{1}{4}\right)i_I - \frac{1}{4}\,i_{III} = 4 - 3$

Malla II: $\left(\frac{1}{2}+1\right)i_{II} - 1\cdot i_{III} = 3 - 2$

Malla III: $-\frac{1}{4}\,i_I - i_{II} + \left(1+\frac{1}{4}\right)i_{III} = 2 - 1$

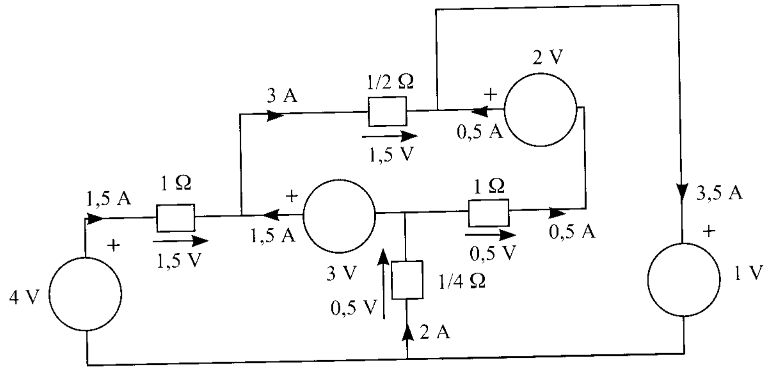
Las ecuaciones en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_I \\ i_{II} \\ i_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que tiene la solución:

$$i_I = 1{,}5 \text{ A}, \qquad i_{II} = 3 \text{ A}, \qquad i_{III} = 3{,}5 \text{ A}$$

A partir de estas corrientes de malla se calculan las corrientes y tensiones en cada elemento del circuito, cuyos valores se muestran en la figura:



Aunque no se pide, se realiza el balance de potencias como comprobación:

Potencias generadas por las fuentes

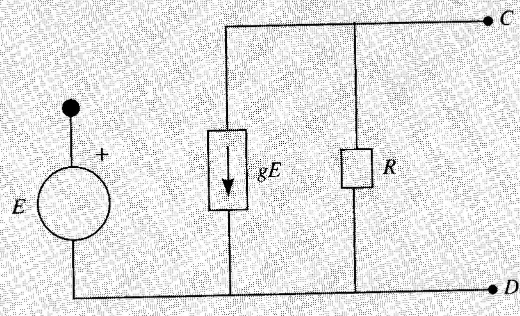
$$\Sigma P_g = 4 \text{ V} \cdot 1{,}5 \text{ A} + 3 \text{ V} \cdot 1{,}5 \text{ A} + 1 \text{ V} \cdot (-3{,}5)\text{A} + 2 \text{ V} \cdot 0{,}5 \text{ A} = 8 \text{ W}$$

Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma P_c = 1 \cdot (1{,}5)^2 + (1/4) \cdot 2^2 + 1 \cdot (0{,}5)^2 + (1/2) \cdot 3^2 = 8 \text{ W}$$

Y por tanto se cumple que $\Sigma P_g = \Sigma P_c$.

1.38 Hallar el equivalente Thévenin del circuito de la figura visto desde los terminales C y D.



SOLUCIÓN

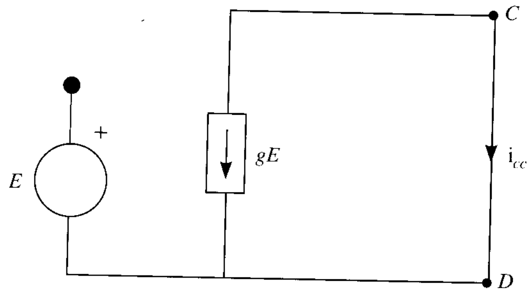
La tensión Thévenin es la tensión a circuito abierto, es decir:

$$E_{th} = u_0 = u_{CD} = -gER$$

La resistencia Thévenin es R, pues si se anulan las fuentes independientes, en este caso la fuente de tensión E, también se anula la fuente dependiente de intensidad y el circuito equivalente entre C y D se limita a la resistencia R:

$$R_{th} = R$$

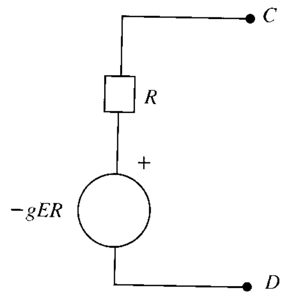
Se calcula, como comprobación, la corriente de cortocircuito. Al cortocircuitar los terminales C y D, no circula corriente por la resistencia R y por tanto el circuito equivalente es el de la figura, de donde se tiene que $i_{cc} = -gE$.



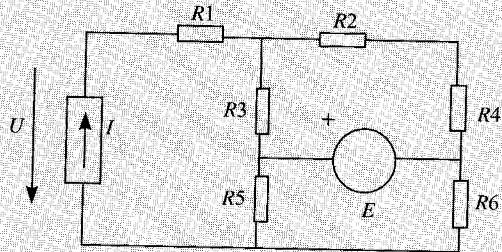
La resistencia Thévenin a partir de la tensión de vacío y de la corriente de cortocircuito es:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{-gER}{-gE} = R$$

Y el circuito Thévenin equivalente se muestra en la figura.



39. Calcular el valor de la fuente de corriente para que la tensión U sea de 3 V.

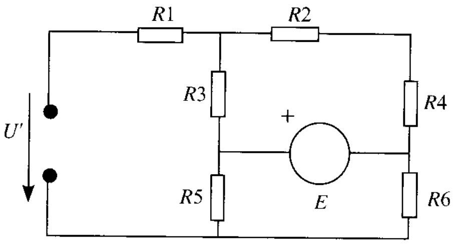


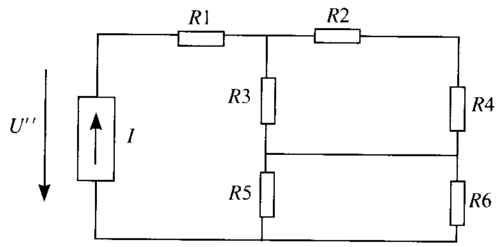
$R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 0{,}3\ \Omega$; $R_3 = 0{,}25\ \Omega$; $R_4 = 0{,}2\ \Omega$; $R_5 = 0{,}2\ \Omega$; $R_6 = 0{,}25\ \Omega$; $E = 4$ V

Nota: se aconseja usar el teorema de superposición.

Solución

Por el teorema de superposición, el circuito se puede resolver analizando por separado el efecto de cada una de las fuentes:





$$U = U' + U''$$

En el primer circuito, la tensión U' será la suma de las tensiones en las resistencias $R3$ $R5$, pues al estar el circuito abierto por $R1$ no circula corriente. Estas tensiones se calculan p divisor de tensión:

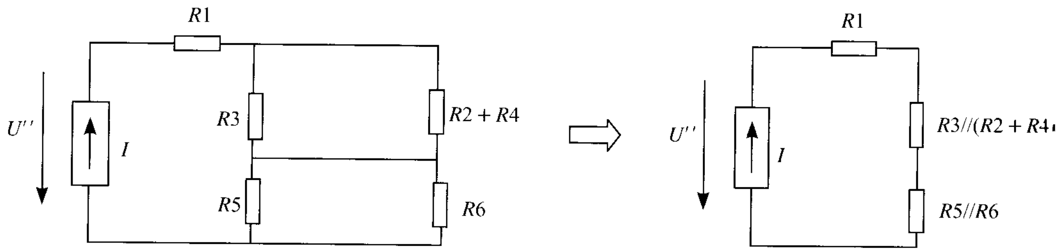
$$U_{R3} = -\frac{R3}{R3 + R2 + R4} \cdot E = -\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}2} \cdot 4 = -1{,}33 \text{ V}$$

$$U_{R5} = \frac{R5}{R5 + R6} \cdot E = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}25} \cdot 4 = 1{,}78 \text{ V}$$

Y la tensión

$$U' = U_{R3} + U_{R5} = -1{,}33 + 1{,}78 = 0{,}45 \text{ V}$$

Para hallar la tensión U'' en el segundo circuito, se asocian convenientemente las resis cias en serie y en paralelo:



Llamando $R7$ a la asociación en paralelo de $R3$ y $(R2 + R4)$, y $R8$ a la asociación en p lelo de $R5$ y $R6$, se tiene que:

$$R7 = \frac{R3(R2 + R4)}{R3 + (R2 + R4)} = \frac{0{,}25(0{,}3 + 0{,}2)}{0{,}25 + (0{,}3 + 0{,}2)} = 0{,}17\ \Omega$$

$$R8 = \frac{R5 \cdot R6}{R5 + R6} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}25}{0{,}2 + 0{,}25} = 0{,}11\ \Omega$$

Por tanto:

$$U'' = (R1 + R7 + R8)I = (1 + 0{,}17 + 0{,}11)I = 1{,}28I$$

Luego, por el teorema de superposición, se debe cumplir:

$$3 = 0{,}45 + 1{,}28I$$

De donde $I = 2$ A.

PROBLEMAS PROPUESTOS

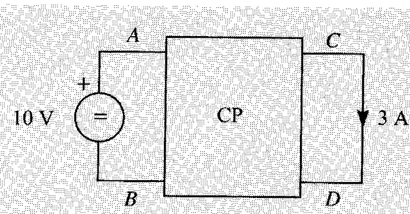


Figura 1

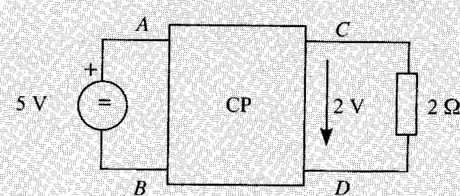


Figura 2

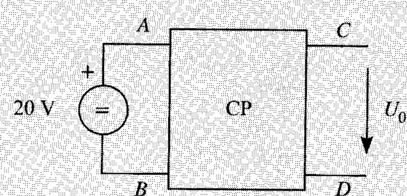


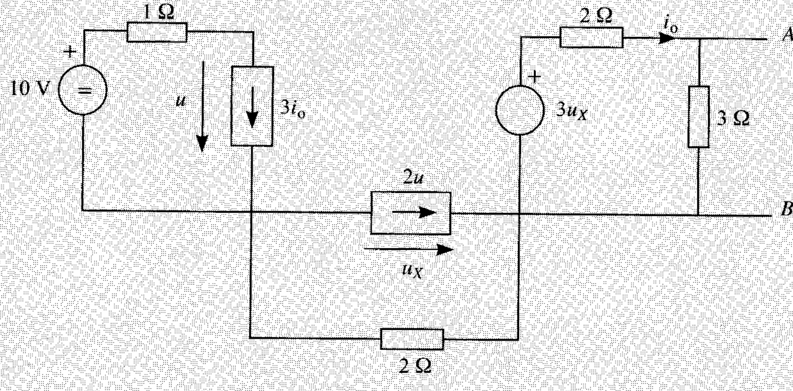
Figura 3

El circuito pasivo (CP) de las tres figuras es el mismo en todas ellas, y está constituido únicamente por resistencias. Determínese la tensión U_0 a circuito abierto indicada en la Figura 3.

Nota: se recomienda emplear el teorema de Thévenin y el principio de superposición.

SOLUCIÓN

$$U_0 = 24 \text{ V}$$

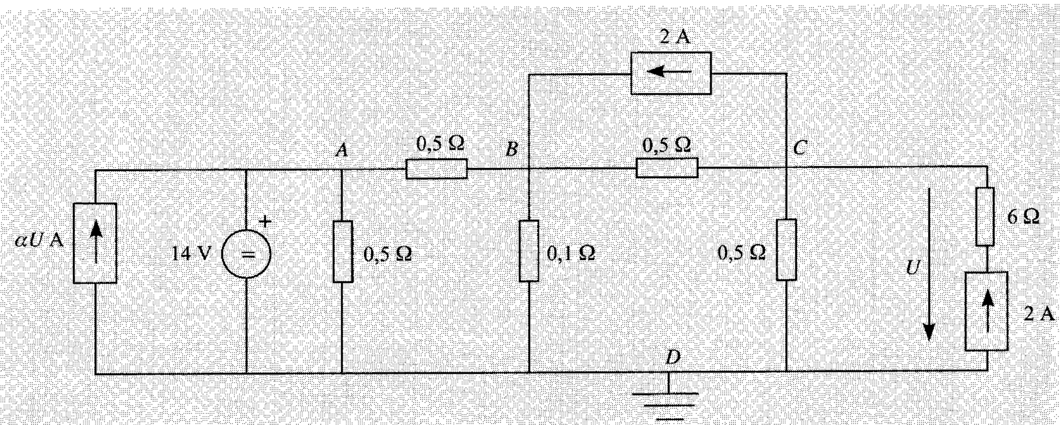


Obtener el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los terminales A y B. Comprobar la solución.

SOLUCIÓN

$$E_{th} = U_0 = 360/31 \text{ V}; \qquad R_{th} = 102/31\ \Omega;\ I_{cc} = 60/17 \text{ A} = U_0/R_{th}$$

1.3.



Para el circuito de corriente continua de la figura, se pide:

1. Calcular, utilizando el método de análisis por nudos, los valores de las tensiones de los nudos *A*, *B* y *C*, respecto al nudo de referencia (nudo *D*).
2. Calcular las potencias cedidas por cada una de las cuatro fuentes.

Datos: $\alpha = 1$.

SOLUCIÓN

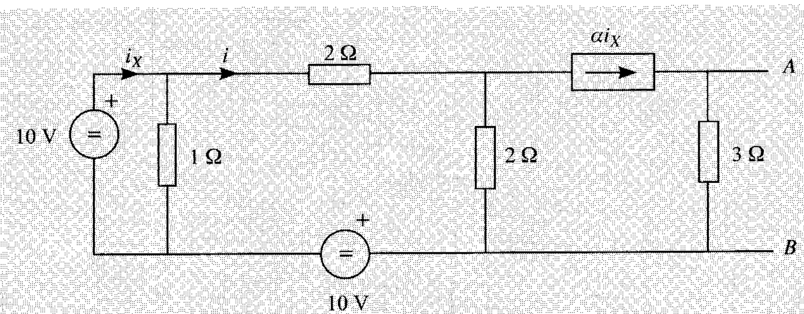
1. $u_A = 14$ V; $u_B = 30/13$ V; $u_C = 15/13$ V.
2. Fuente de 2 A en serie con la resistencia de 6 Ω: $P_1 = -282/13$ W (potencia absorbida).

   Fuente de 2 A entre *C* y *B*: $P_2 = 15/13$ W.

   Fuente de 14 V: $P_3 = 9142/13$ W.

   Fuente de corriente dependiente de tensión *U*: $P_4 = 210/13$ W.

1.4.



Obtener el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los puntos **A** y *B*. *Datos:* $\alpha = 1$.

SOLUCIÓN

$$E_{th} = 60 \text{ V}; \qquad R_{th} = 3\ \Omega. \quad (\text{Como comprobación, } I_{cc} = 20 \text{ A})$$

Un circuito está formado por tres resistencias y tres fuentes de corriente continua. Las resistencias están conectadas en triángulo con tres vértices A, B, C y sus valores son: $R_{AB} = 2\ \Omega$, $R_{BC} = 1\ \Omega$, $R_{AC} = 3\ \Omega$. Las tres fuentes están conectadas en estrella entre los vértices A, B, C y un punto N. La fuente NA es de corriente de valor $i_{NA} = 3$ A; la fuente NB es de tensión de valor $e_{BN} = 3$ V, y la fuente NC es de tensión de valor $e_{NC} = 6$ V. **Hallar la tensión u_{AC}.**

SOLUCIÓN

$$u_{AC} = 9 \text{ V}$$

Un dipolo está formado únicamente de fuentes independientes y resistencias, y tiene dos terminales. Si se conecta entre estos terminales una resistencia de 3 Ω, esta resistencia disipa una potencia de 12 W. Por otro lado, se sabe que la potencia máxima que puede suministrar la fuente es de 25 W. Determínese la corriente que suministra la fuente cuando entrega la máxima potencia.

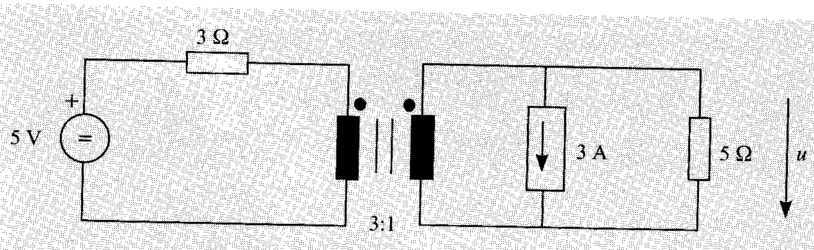
SOLUCIÓN

Dos soluciones: a) $i = 1{,}16$ A o b) $i = 7{,}17$ A.

Se quieren alimentar unas barras de corriente continua con baterías de tensión nominal 12 V y resistencia interna 0,5 Ω. Las barras deberán estar a una tensión de 240 V en circuito abierto y el conjunto de baterías deberá suministrar una potencia de 7 kW sin que la tensión en la carga sea inferior al 95 % de la tensión a circuito abierto. Determínese el número de baterías que deben conectarse en serie y en paralelo para que se cumplan estas condiciones.

SOLUCIÓN

26 ramas en paralelo cada una con 20 baterías en serie. Es decir, en total serían necesarias 520 baterías.



En el circuito de la figura, hallar el valor de u.

SOLUCIÓN

$$u = 5/8 \text{ V}$$

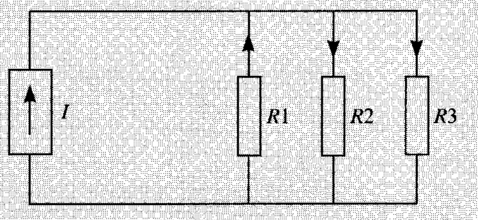
Un circuito resistivo está alimentado por dos fuentes de continua F_1 y F_2. Si sólo actúa la fuente F_1, la potencia disipada en una resistencia R conectada entre dos terminales A y B del circuito es de 8 W, y $u_{AB} > 0$. Si sólo actúa la fuente F_2, la potencia disipada en R es de 30 W, y $u_{AB} > 0$. Calcular la potencia disipada en R cuando actúan las dos fuentes simultáneamente.

SOLUCIÓN

$$P = 68{,}98 \text{ W}$$

1.10. En el circuito de la figura con las referencias de intensidad indicadas, hallar la intensidad que circula por cada resistencia.

Datos: $R1 = 4\ \Omega$; $R2 = 8\ \Omega$; $R3 = 2\ \Omega$; $I = 4$ A.



SOLUCIÓN

$$I_1 = -8/7 \text{ A};\ I_2 = 4/7 \text{ A};\ I_3 = 16/7 \text{ A}$$

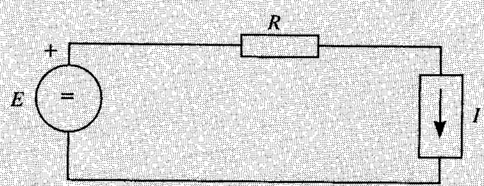
CUESTIONES PROPUESTAS

1.1 Un dipolo, con dos terminales A y B, está formado por fuentes de corriente continua y resistencias. Si se conecta entre A y B un condensador, la tensión en régimen permanente es $u_{AB} = 10$ V. Si se conecta entre A y B una bobina, la corriente en régimen permanente en la bobina $i_{AB} = 5$ A. Calcúlese el equivalente Thévenin del dipolo con respecto a los puntos A y B.

SOLUCIÓN

$$E_{th} = 10 \text{ V}; \; R_{th} = 2\ \Omega$$

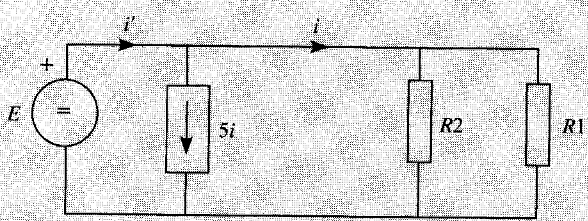
1.2 En el circuito de la figura $E = 20$ V, $I = 1$ A, $R = 1\ \Omega$. Calcúlese la potencia generada por la fuente de corriente I.



SOLUCIÓN

$$P = -19 \text{ W}$$

1.3 En el circuito de la figura calcúlese el valor de la corriente i'.

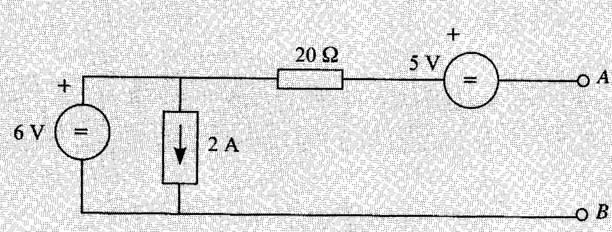


Datos: $E = 10$ V; $R1 = R2 = 4\ \Omega$.

SOLUCIÓN

$$i' = 30 \text{ A}$$

1.4 Calcúlese el equivalente Thévenin del circuito de la figura visto desde los terminales A y B.



SOLUCIÓN

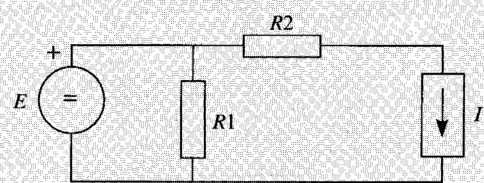
$$E_{th} = 11 \text{ V}; \ R_{th} = 20 \ \Omega$$

1.5. Dos fuentes reales de corriente continua cuyos parámetros son $I_{g1} = 2$ A, $I_{g2} = 3$ A y $R_{g1} = 8 \ \Omega$, $R_{g2} = 5 \ \Omega$, están conectadas en paralelo formando un dipolo. Indicar cuál es la potencia máxima que puede suministrar dicho dipolo.

SOLUCIÓN

$$P_{\text{máx}} = 19{,}23 \text{ W}$$

1.6. En el circuito de la figura indíquese la potencia generada por la fuente de corriente I.

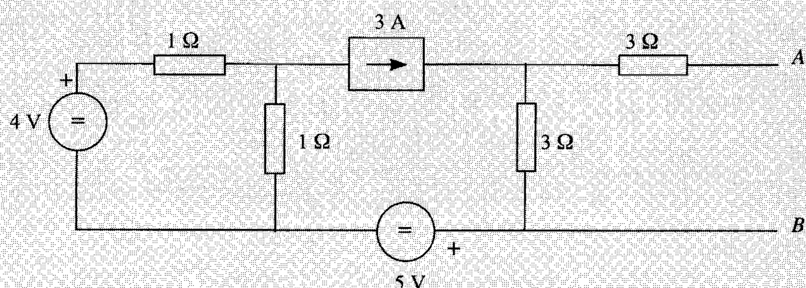


Datos: $E = 10$ V; $R1 = 4{,}5$ kΩ; $R2 = 1 \ \Omega$; $I = 3$ A.

SOLUCIÓN

$$P = -21 \text{ W (criterio de potencia entrante)}$$

1.7. En el circuito de la figura calcúlese el equivalente Thévenin visto desde los terminales A y B.



SOLUCIÓN

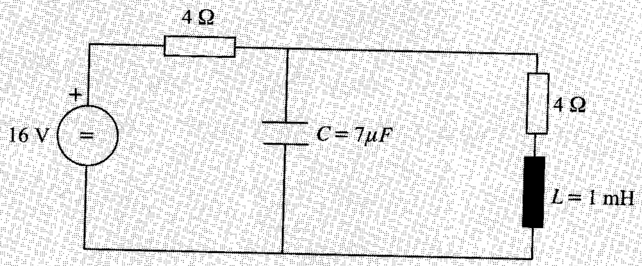
$$E_{th} = 9 \text{ V}; \ R_{th} = 6 \ \Omega$$

1.8. Una bobina ideal de 4 mH inicialmente descargada se conecta a una fuente de tensión continua de 4 V. Determínese el tiempo que tardará la bobina en adquirir una energía de 8 mJ.

SOLUCIÓN

$$t = 2 \text{ ms}$$

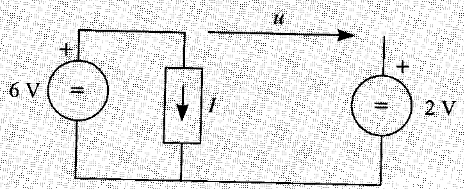
9 Calcúlese la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina cuando ha transcurrido un tiempo lo suficientemente grande como para que se haya llegado al régimen permanente.



SOLUCIÓN

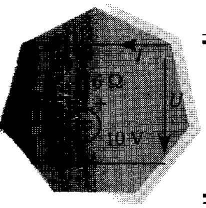
$$u_C = 8 \text{ V}; \ i_L = 2 \text{ A}$$

10 En el circuito de la figura todas las fuentes son de continua. Indíquese la potencia absorbida por la fuente I, si $I = 3u$.



SOLUCIÓN

$$P = 72 \text{ W}$$



CAPÍTULO 2

CIRCUITOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DE UNA ONDA SINUSOIDAL

En corriente alterna, la evolución de tensiones y corrientes con el tiempo viene dada por funciones de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \cos(\omega t + \delta)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \theta)$$

En donde:

- ω Pulsación (rad/s).
- T Período (s).
- f Frecuencia (Hz) $f = \dfrac{1}{T}$ $\qquad \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
- θ, δ Desfases con respecto al origen (rad). También se pueden expresar en grados, o en segundos.
- U Valor eficaz (V). A las magnitudes $U_o = \sqrt{2}\, U$ e $I_o = \sqrt{2}\, I$ se les denomina valor máximo o amplitud de la onda.
- u, i Valor instantáneo (V) ó (A)

Para los análisis de circuitos en corriente alterna, estas magnitudes se representan mediante números complejos asociados a ellas, denominados *fasores*.

$$u(t) \rightarrow \mathbf{U} = U\underline{/\delta} \qquad\qquad i(t) \rightarrow \mathbf{I} = I\underline{/\theta}$$

Los números complejos **U** e **I** se pueden representar en el plano complejo, obteniéndose el *diagrama vectorial* (Figura 2.1).

2.2. RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS PASIVOS. IMPEDANCIA

A continuación se va a indicar la respuesta de cada uno de los tres elementos pasivos básicos: resistencia, bobinas, acopladas o no, y condensadores ante excitaciones sinusoidales, utilizando los fasores. De esta forma, en un circuito de alterna bastará sustituir cada elemento por su modelo en corriente alterna y utilizar las técnicas de análisis de circuitos, generalizadas en

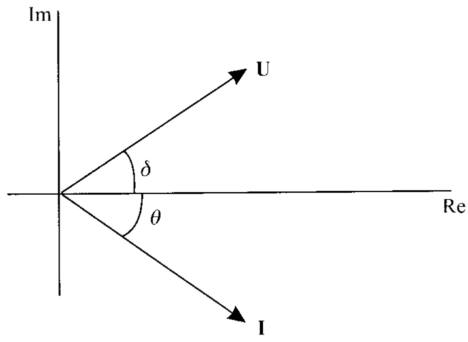


Figura 2.1.

circuitos de alterna, que permitirán hallar los parámetros (módulo y argumento) de las tensiones y corrientes desconocidas en el circuito.

Las tensiones y corrientes que circulan por los elementos tendrán la siguiente expresión:

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos (\omega t + \theta)$$

Se supone, con el fin de simplificar las expresiones pero sin pérdida de generalidad, que el desfase de la tensión es nulo.

- **Resistencia**

$$\mathbf{U} = \mathrm{R} \cdot \mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{U}{R} \qquad \theta = 0$$

Diagrama vectorial de tensión e intensidad:

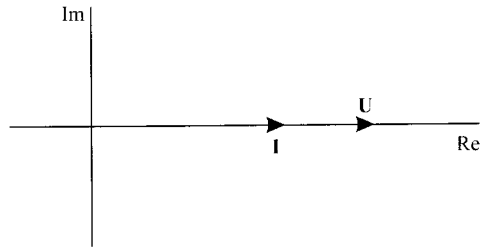


Figura 2.2.

- **Condensador**

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{U}$$

$$I = \omega CU \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Diagrama vectorial de tensión e intensidad:

Figura 2.3.

- **Bobina**

$$\mathbf{U} = j\omega L\mathbf{I}$$

$$U = \omega LI \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Diagrama vectorial:

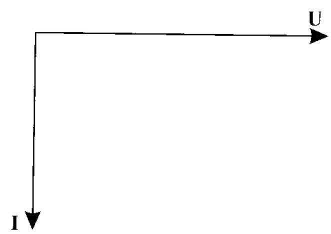


Figura 2.4.

- **Bobinas acopladas**

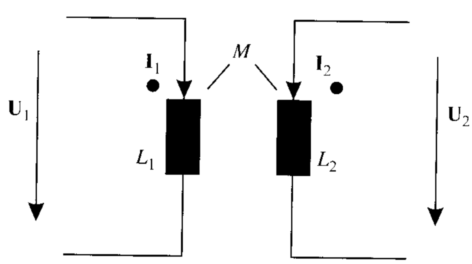


Figura 2.5.

$$\mathbf{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \mathbf{I}_1 + j\omega M \cdot \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{U}_2 = j\omega M \cdot \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \mathbf{I}_2$$

- **Impedancia**

En general:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X$$

Z *impedancia del circuito* (Ω)
R *resistencia* del circuito (Ω)
X *reactancia* (Ω)

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

Triángulo de impedancias:

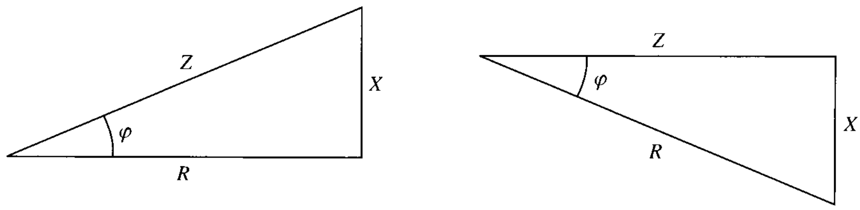


Figura 2.6.

• Admitancia Y

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = G + j \cdot B = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{R^2}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X^2}{R^2 + X^2}$$

G conductancia (S)
B susceptancia (S)

• Transformador ideal. Adaptación de impedancias

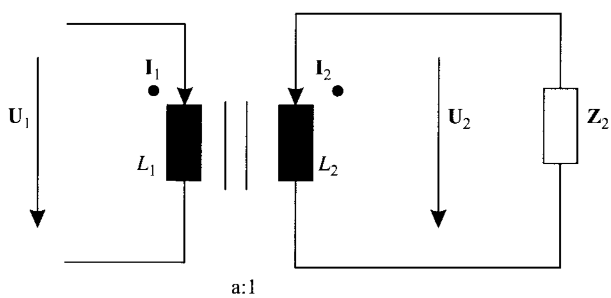


Figura 2.7.

El cociente entre la tensión y la corriente en el primario del transformador será:

$$\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{a \cdot \mathbf{U}_2}{\frac{1}{a} \cdot \mathbf{I}_2} = a^2 \cdot \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} = a^2 \mathbf{Z}_2$$

$\mathbf{Z}_1 = a^2 \mathbf{Z}_2$. Es la *impedancia referida al primario*.

Mediante un transformador ideal se pueden transformar las impedancias en otras de distinto valor. Este proceso se denomina *adaptación de impedancias*.

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN CORRIENTE ALTERNA

Para corrientes de la misma pulsación concurrentes en un nudo de un circuito, se cumple la primera ley de Kirchhoff:

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n = 0$$

Del mismo modo, para tensiones en un circuito cerrado, con la misma pulsación, se cumple la segunda ley de Kirchhoff:

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \cdots + \mathbf{U}_n = 0$$

La impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{eq}$ de un conjunto de impedancias en serie $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, ..., $\mathbf{Z}_n$ es $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n$.

Un conjunto de impedancias conectadas en serie forma un divisor de tensión en alterna. La tensión en una impedancia k, $\mathbf{U}_k$ vendrá dada por:

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{I} = \frac{\mathbf{Z}_k}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n} \cdot \mathbf{U}$$

La admitancia equivalente $\mathbf{Y}_{eq}$ de un conjunto de impedancias o admitancias en paralelo $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$, ..., $\mathbf{Y}_n$, tiene el valor $\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n$. Si esta expresión se pone en función de las impedancias queda:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots \frac{1}{\mathbf{Z}_n}$$

La corriente que circularía por una admitancia k, $\mathbf{I}_k$, de un conjunto de admitancias conectadas en paralelo sería:

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{U} = \frac{\mathbf{Y}_k}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n} \cdot \mathbf{I}$$

Esta es la fórmula del divisor de corriente.

Las fórmulas de la transformación triángulo-estrella y estrella-triángulo son semejantes a las de continua, sólo que con impedancias. Se escriben a continuación:

$$\mathbf{Z}_a = \frac{\mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Z}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ab} + \mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ca}} \qquad \mathbf{Z}_b = \frac{\mathbf{Z}_{bc} \cdot \mathbf{Z}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab} + \mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ca}} \qquad \mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{Z}_{\mathrm{ca}} \cdot \mathbf{Z}_{bc}}{\mathbf{Z}_{ab} + \mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ca}}$$

$$\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_c} \qquad \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c + \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a} \qquad \mathbf{Z}_{ca} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_c + \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_b}$$

RESOLUCIÓN DE UN CIRCUITO *R-L-C* SERIE

En un circuito como el representado en la Figura 2.8, del que se desea conocer sus tensiones y corrientes en régimen estacionario sinusoidal,

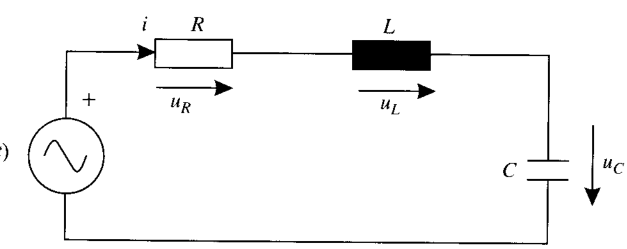


Figura 2.8.

se obtiene el circuito equivalente en alterna:

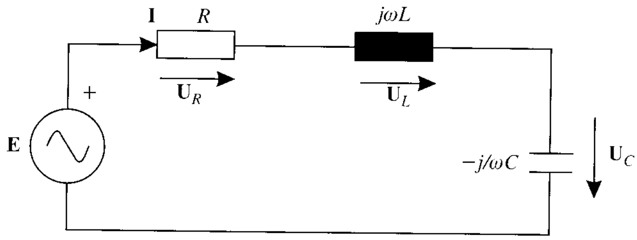


Figura 2.9.

donde $\mathbf{E} = E\underline{/0}$. La impedancia del circuito es:

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X = R + j\omega L - j \cdot \frac{1}{\omega C} = Z\underline{/\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

El valor de la corriente es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{E}{Z} \qquad \theta = -\varphi$$

Las tensiones en cada uno de los elementos son:

$$\mathbf{U}_R = R \cdot \mathbf{I} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{U}_L = j\omega L \cdot \mathbf{I} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \mathbf{I} = \frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}\mathbf{E}$$

En este circuito se pueden distinguir dos casos, y en cada uno de los cuales se presenta el diagrama vectorial:

- $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$ (reactancia inductiva) $\qquad \varphi > 0 \qquad \theta = -\varphi < 0$

En este caso, la corriente está retrasada con respecto a la tensión de la fuente.

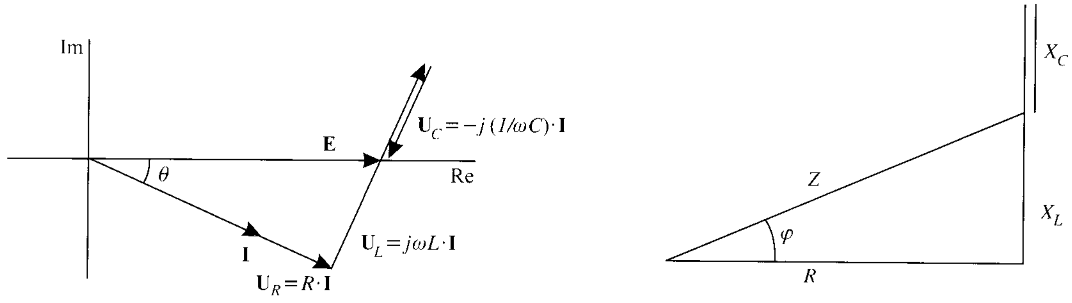


Figura 2.10.

- $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$ (reactancia capacitiva) $\qquad \varphi < 0 \qquad \theta = -\varphi > 0$

En este caso, la corriente está adelantada con respecto a la tensión de la fuente.

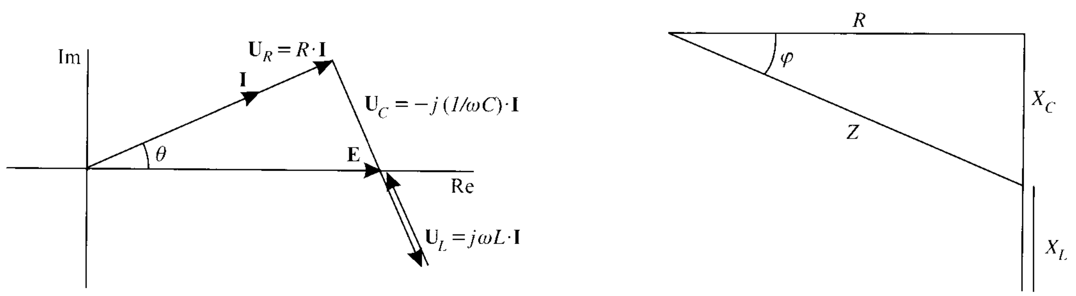


Figura 2.11.

POTENCIA CONSUMIDA POR UN DIPOLO: POTENCIA ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE

Sea el dipolo representado en la Figura 2.12, en la que se han puesto referencias de potencia entrante.

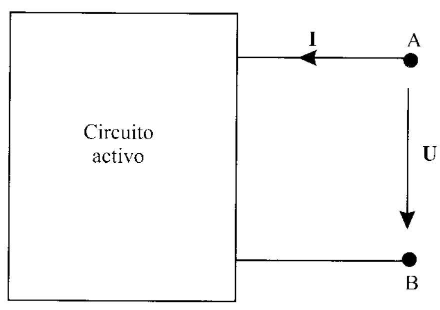


Figura 2.12.

La tensión y la corriente tendrán la expresión siguiente:

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos (\omega t - \varphi)$$

La tensión y la corriente vendrán representadas por los fasores $\mathbf{U} = U\underline{/0}$ y $\mathbf{I} = I\underline{/-\varphi}$. La potencia *instantánea* consumida por el dipolo será:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + UI \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega t$$

En esta descomposición de la potencia instantánea el primer término

$$UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t)$$

es una potencia oscilante de una frecuencia doble que la de la red y con un valor medio no nulo, mientras que el segundo término

$$UI \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega t$$

es una oscilación de potencia de valor medio nulo y de frecuencia doble que la de la red.
Se definen los siguientes términos:

$P = UI \cos \varphi$	Potencia activa: se mide en vatios (W)
$Q = UI \operatorname{sen} \varphi$	Potencia reactiva: se mide en voltamperios reactivos (VAr)

A partir de las potencias activa y reactiva se define la potencia aparente, S, que se mide en voltamperios (VA).

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{(VA)}$$

También se define el número complejo **S** o potencia aparente compleja:

$$\mathbf{S} = P + jQ = UI(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi}$$

El módulo de la potencia aparente compleja es la potencia aparente.

• Distintas expresiones de la potencia en alterna

En una impedancia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}\mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot I^2 = (R + j \cdot X) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + j \cdot X \cdot I^2$$

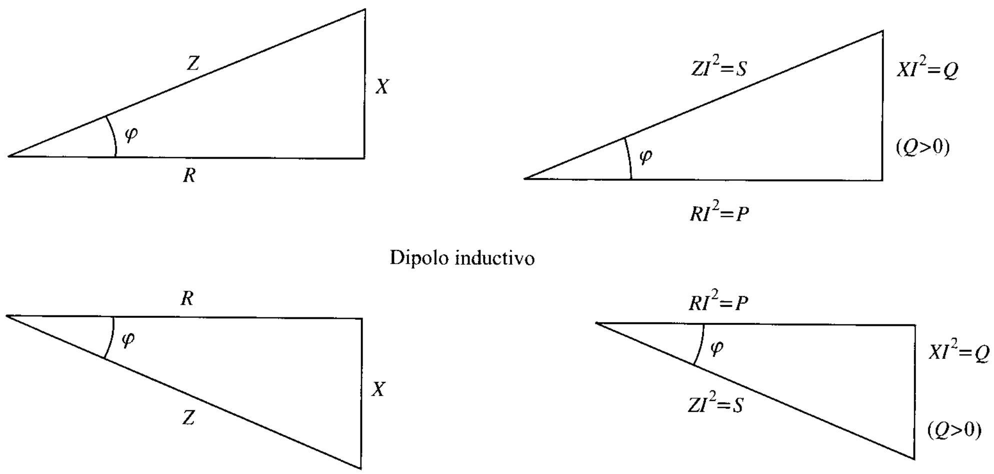
$$P = R \cdot I^2 \qquad\qquad Q = X \cdot I^2$$

En una admitancia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{U}\mathbf{Y}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{Y}^* U^2 = (G - j \cdot B) \cdot U^2 = G \cdot U^2 - j \cdot B \cdot U^2$$

$$P = G \cdot U^2 \qquad\qquad Q = -B \cdot U^2$$

Se puede definir un triángulo de potencias análogo al de impedancias, que se muestra en la Figura 2.13.



Dipolo inductivo

Dipolo capacitivo

Figura 2.13.

• Teorema de Boucherot

Este teorema es una formulación del teorema de conservación de la energía, y su aplicación es una generalización del balance de potencias que se realiza en los circuitos de continua. Su enunciado es el siguiente:

> «En un circuito lineal, para una frecuencia constante, hay conservación de la potencia activa, por una parte, y de la potencia reactiva, por otra.»

• Factor de potencia

El *factor de potencia* de una carga o circuito, o $\cos\varphi$, es:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I}$$

Conviene que el factor de potencia sea lo más alto posible, y para poder conseguir esto hay que corregirlo. Dado que las cargas son normalmente inductivas, habrá que conectar condensadores en paralelo con la carga.

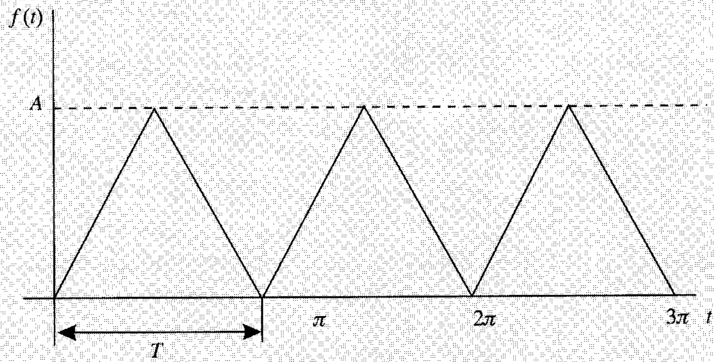
El valor del condensador necesario es:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

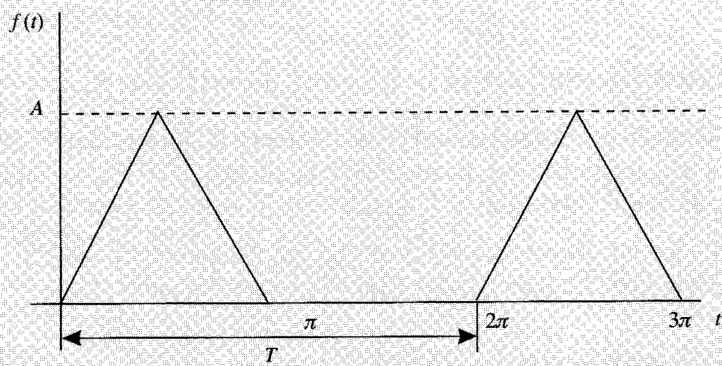
PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Hállese el valor medio y eficaz de las formas de onda representadas en las figuras siguientes:

ONDA 1:



ONDA 2:



Solución

El valor medio de una forma de onda $f(t)$ se calcula mediante la expresión:

$$F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Pero la integral entre 0 y T de $f(t)$ es el área encerrada bajo la curva $f(t)$ y el eje abcisas. Para la onda 1 se trata del área de un triángulo de base igual a T y altura igual a mientras que para la onda 2 el triángulo tiene base igual a $T/2$. Luego el valor medio de ca onda es:

ONDA 1: $F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{T\cdot A}{2}\right) = \frac{A}{2}$

ONDA 2: $F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{T/2\cdot A}{2}\right) = \frac{A}{4}$

E[illegible] eficaz de una forma de onda $f(t)$ viene dado por la expresión:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt}$$

ONDA 1: $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi}\,t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 2A - \dfrac{2A}{\pi}\,t, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

$$F_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2A}{\pi}\,t\right]^2 dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[2A - \frac{2A}{\pi}\,t\right]^2 dt =$$

$$= \frac{4A^2}{\pi^3}\int_0^{\pi/2} t^2\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[4A^2 - \frac{8A^2}{\pi}\,t + \frac{4A^2}{\pi^2}\,t^2\right]dt =$$

$$= \frac{4A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{4A^2}{\pi}\,[t]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{8A^2}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{4A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{4A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} + \frac{4A^2}{\pi}\,[t]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{8A^2}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{4A^2}{3} + 2A^2 - 3A^2 = \frac{A^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}}}$$

ONDA 2: $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi}\,t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 2A - \dfrac{2A}{\pi}\,t, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \\ 0, & \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$F_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2A}{\pi}\,t\right]^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[2A - \frac{2A}{\pi}\,t\right]^2 dt =$$

$$= \frac{2A^2}{\pi^3}\int_0^{\pi/2} t^2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[4A^2 - \frac{8A^2}{\pi}\,t + \frac{4A^2}{\pi^2}\,t^2\right]dt =$$

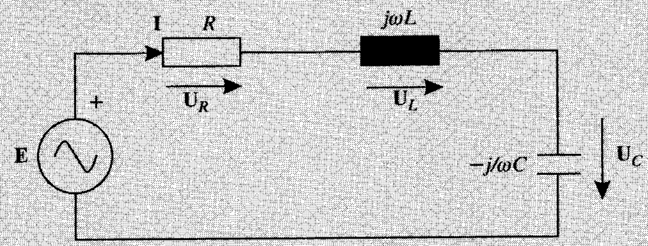
$$= \frac{2A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2A^2}{\pi}\,[t]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{4A^2}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{2A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{2A^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} + \frac{2A^2}{\pi}\,[t]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{4A^2}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{2A^2}{3} + A^2 - \frac{3A^2}{2} = \frac{A^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{ef} = \frac{A}{\sqrt{6}}}$$

2.2. En el circuito de la figura, calcúlese en módulo y argumento el valor de la fuente de te[...] **E**, tomando como origen de fases la corriente **I**. (Se aconseja dibujar el diagrama vecto[...]

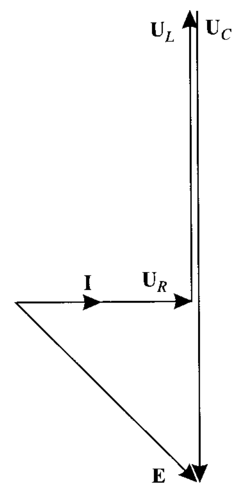
Datos: $U_R = 10$ V, $U_L = 20$ V, $U_C = 30$ V.



SOLUCIÓN

Se aplica la segunda ley de Kirchhoff, según la cual: $\mathbf{E} = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C$.

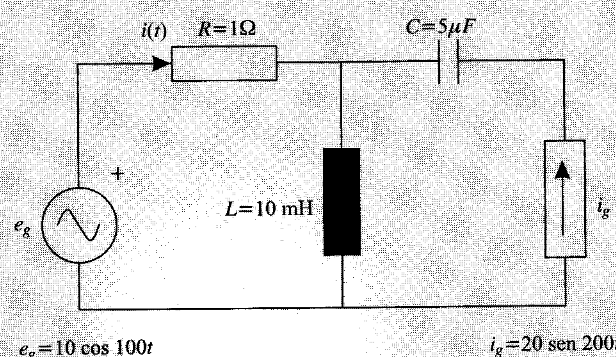
Y el diagrama vectorial:



La relación entre los módulos de estas tensiones es, según el diagrama:

$$E = \sqrt{U_R^2 + (U_C - U_L)^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ V} \qquad \mathbf{E} = 10\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ} \text{ V}$$

2.3. En el circuito de la figura, calcúlese la intensidad instantánea $i(t)$ que en el régimen [...]tacionario circula por la resistencia de 1 Ω.



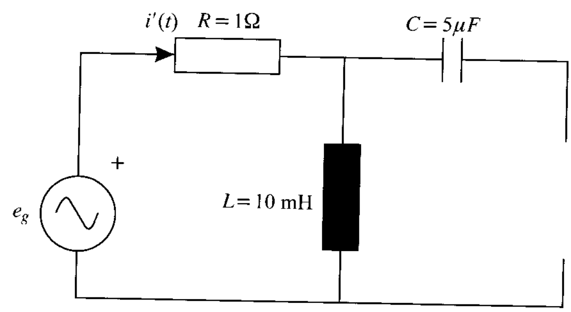
SOLUCIÓN

En la resolución de este circuito no se pueden utilizar directamente los métodos de alterna, puesto que las fuentes del mismo son de frecuencias diferentes. No obstante, y dado que el circuito es lineal, se puede aplicar el principio de superposición. Por tanto, la corriente buscada será la suma de dos corrientes:

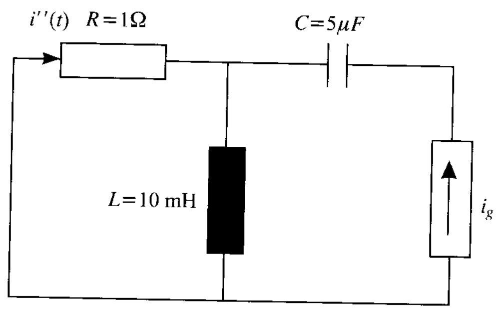
$$i = i' + i''$$

donde i' es la corriente que circula cuando sólo actúa la fuente de tensión, e i'' es la corriente que circula cuando sólo actúa la fuente de corriente. Puesto que en cada uno de los circuitos auxiliares sólo hay una fuente, sí que se podrán usar en cada uno de ellos los fasores.

Por otra parte, la corriente que circula por el condensador está impuesta por la fuente de corriente, luego, para calcular las corrientes i e i'' este condensador se puede eliminar porque no aporta ninguna información.



$e_g = 10 \cos 100t$



$i_g = 20 \operatorname{sen} 200t$

$$\mathbf{I}' = \frac{\mathbf{E}_g}{R + j\omega_1 L} = \frac{10}{1 + j} \qquad \mathbf{I}'' = \frac{-j\omega_2 L}{R + j\omega_2 L} \cdot \mathbf{I}_g = \frac{j2}{1 + j2} \cdot 20$$

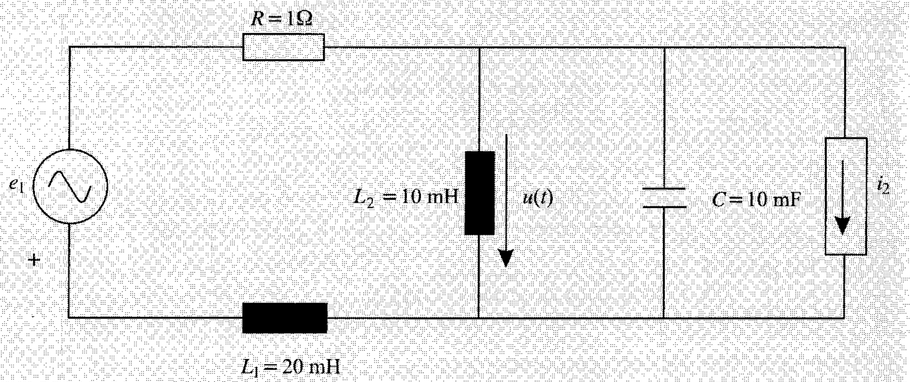
$$\mathbf{I}' = 5(1 - j) = 5\sqrt{2}\underline{/\pi/4} \qquad \mathbf{I}'' = -8(2 - j) = 8\sqrt{5}\underline{/-0{,}85\pi}$$

Una vez obtenidas las corrientes en cada circuito auxiliar, hay que obtener la expresión temporal de las mismas con el fin de poder aplicar superposición:

$$i'(t) = 5\sqrt{2}\cos(100t - \pi/4) \qquad i''(t) = 8\sqrt{5}\operatorname{sen}(200t - 0{,}85\pi)$$

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 5\sqrt{2}\cos(100t - \pi/4) + 8\sqrt{5}\operatorname{sen}(200t - 0{,}85\pi)$$

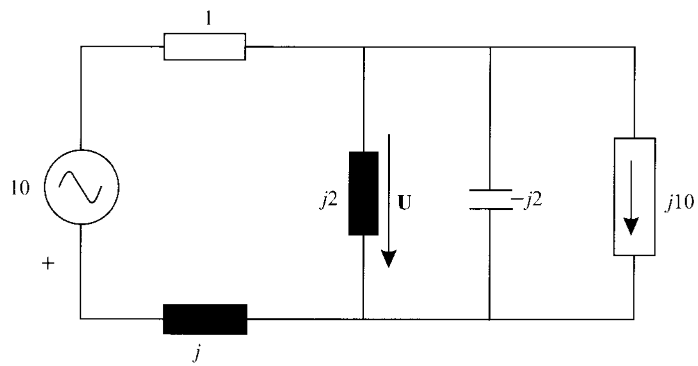
2.4. En el circuito que se muestra en la figura, hállese $u(t)$, empleando el método de mallas el régimen estacionario; y dibújese el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.



$$e_1 = 10 \cos 50t \qquad i_2 = -10 \operatorname{sen} 50t$$

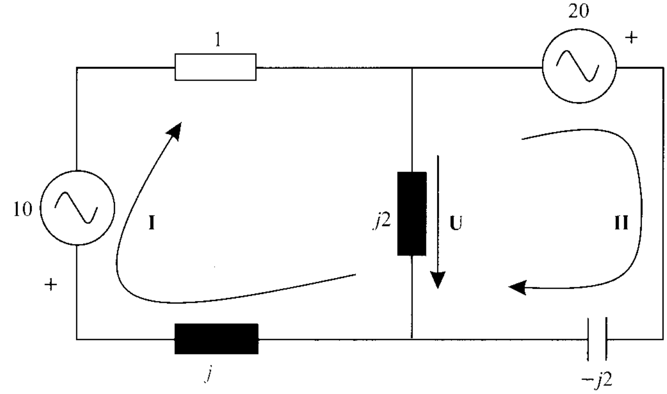
Solución

En primer lugar, se obtiene el circuito de alterna, en el que los elementos pasivos se repres tan mediante sus impedancias, y las tensiones y corrientes por sus fasores asociados. El cuito de alterna es el que se representa a continuación. La fuente de tensión se ha tom como origen de fases, y la fuente de corriente está adelantada $\pi/2$ con respecto a la de tensi



Para realizar su resolución por el método de mallas, se va a cambiar la fuente de corri en paralelo con un condensador, por una fuente de tensión en serie con el mismo condens dor. Si $\mathbf{I}_2 = j10$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_2 \cdot (-j/\omega C) = j10 \cdot (-j2) = 20$.

El circuito resultante tras esta transformación se muestra en la figura siguiente:



En este circuito se plantean las ecuaciones correspondientes al análisis por mallas:

$$(R + j\omega L_1 + j\omega L_2)\mathbf{I}_\mathrm{I} - j\omega L_2 \mathbf{I}_\mathrm{II} = -\mathbf{E}_1$$
$$-j\omega L_2 \mathbf{I}_\mathrm{I} + (j\omega L_2 - j(1/\omega C))\mathbf{I}_\mathrm{II} = \mathbf{E}_2$$

Donde $\mathbf{I}_\mathrm{I}$ e $\mathbf{I}_\mathrm{II}$ son las corrientes de las mallas I y II, respectivamente.
Se sustituyen valores y se halla la solución:

$$(1 + j3)\mathbf{I}_\mathrm{I} - j2\mathbf{I}_\mathrm{II} = -10 \qquad \mathbf{I}_\mathrm{I} = j10$$
$$-j2\mathbf{I}_\mathrm{I} = 20 \qquad \mathbf{I}_\mathrm{II} = 5 + j10$$

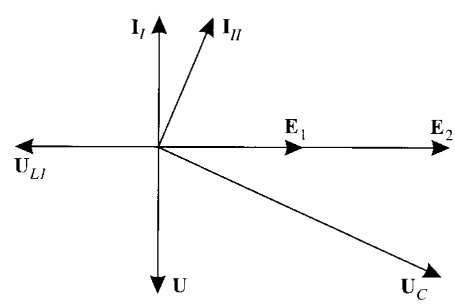
A partir de los valores de estas dos corrientes, se obtienen los de las restantes tensiones y corrientes.

$$\mathbf{U}_{L1} = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 = j(j10) = -10$$
$$\mathbf{U}_R = R\mathbf{I}_1 = 1 \cdot j10 = j10$$
$$\mathbf{U}_C = (-j/\omega C)\cdot \mathbf{I}_\mathrm{II} = -j2\cdot(5 + j10) = 20 - j10$$
$$\mathbf{U} = j2(j10 - \mathbf{I} - j10) = -j10$$

La expresión temporal de la tensión $u(t)$ será:

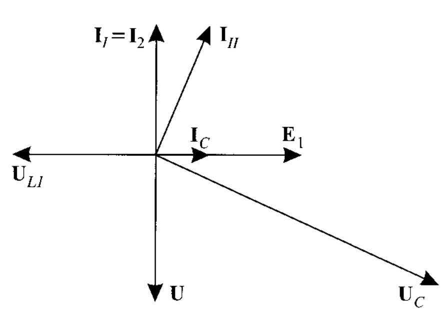
$$u(t) = 10\cos(50t - \pi/2) = 10\,\mathrm{sen}\,50t$$

En el diagrama vectorial del circuito auxiliar se representan estas magnitudes:



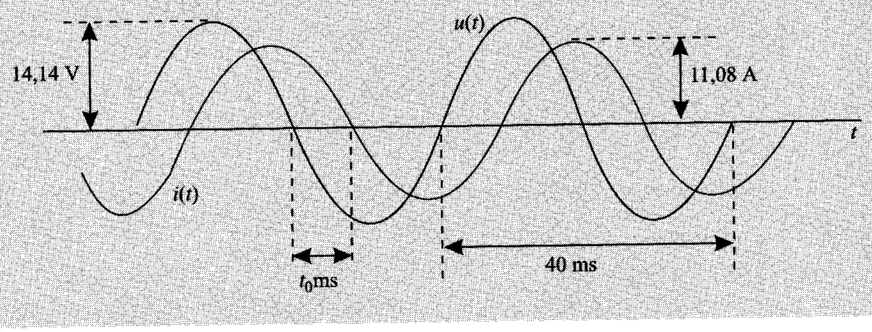
$$\mathbf{U}_{L1} = -10 \qquad \mathbf{E}_1 = 10$$
$$\mathbf{U}_R = j10 \qquad \mathbf{E}_2 = 20$$
$$\mathbf{U}_C = 20 - j10 \qquad \mathbf{I}_\mathrm{I} = j10$$
$$\mathbf{U} = -j10 \qquad \mathbf{I}_\mathrm{II} = 5 + j10$$

El diagrama vectorial del circuito original se muestra a continuación, y la corriente que pasa por el condensador es: $\mathbf{I}_C = j\omega C\mathbf{U} = j0{,}5\cdot(-j10) = 5$.



2.5. En la figura se muestra la tensión aplicada y la corriente circulante por una impedancia **Z**. Determínense los valores de las partes real e imaginaria de **Z**, indicando el signo de ambas.

(*Dato*: $t_o = 8$ ms).



SOLUCIÓN

Las expresiones de corriente y tensión, deducidas a partir del oscilograma son:

$$\mathbf{U} = \frac{14{,}14}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ} \quad \text{(V)} \qquad \text{(que se toma, arbitrariamente, como origen de fases).}$$

$$\mathbf{I} = \frac{11{,}08}{\sqrt{2}} \underline{/-72^\circ} \quad \text{(A)}$$

El ángulo se ha obtenido a partir del tiempo de retraso de una onda respecto a otra:

$$\alpha = \frac{t_o}{T} \cdot 360^\circ = \frac{8}{40} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

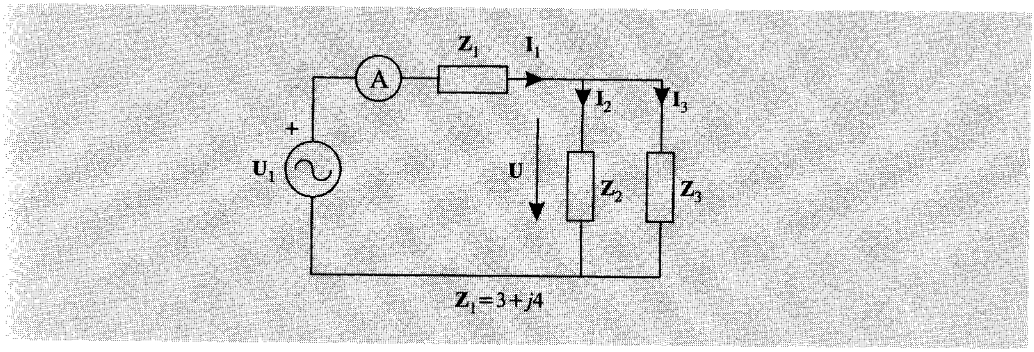
Una vez conocidas tensión y corriente, la impedancia se calcula como cociente de ambas:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{\dfrac{14{,}14}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ}}{\dfrac{11{,}08}{\sqrt{2}} \underline{/-72^\circ}} = 1{,}276 \underline{/72^\circ} = 0{,}394 + j1{,}214 \ (\Omega)$$

Se puede observar en el oscilograma que $i(t)$ está retrasada con respecto a $u(t)$.

2.6. En el circuito de la figura el amperímetro marca 4 A y $\mathbf{Z}_1 = 3 + j4$. Se sabe además que $\mathbf{Z}_2$ es puramente capacitiva y que $\mathbf{Z}_3$ es de carácter inductivo, con el mismo valor en su parte resistiva que en su parte reactiva. El conjunto formado por $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ en paralelo es puramente resistivo, con una impedancia de valor 5 Ω. Se pide:

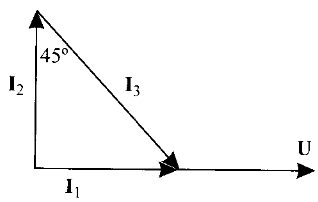
1. Dibújese el diagrama vectorial de intensidades.
2. El valor de las impedancias complejas $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$.
3. El valor de la fuente de tensión.



SOLUCIÓN

1. La resolución de este problema es más sencilla si se traza el diagrama vectorial de acuerdo con las condiciones del enunciado. Se toma como origen de fases, por comodidad, la tensión $\mathbf{U}$, puesto que hay dos elementos en paralelo.

Si se aplica la primera ley de Kirchhoff $\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1$. Por otra parte, según el enunciado, el conjunto formado por $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ es puramente resistivo, luego $\mathbf{I}_1 = 4$ (pues es la lectura del amperímetro).



Las otras dos corrientes vienen dadas, puesto que los desfases relativos están impuestos por las impedancias ($\mathbf{I}_2$ debe estar adelantada 90° respecto a la tensión, e $\mathbf{I}_3$ retrasada 45° respecto a la misma tensión) y el hecho de que $\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1$. Esto permite deducir los valores de las corrientes.

$$\mathbf{I}_2 = j4 \qquad\qquad \mathbf{I}_3 = 4 - j4$$

Y por tanto, el de la tensión, puesto que se conoce la impedancia paralelo de ambas, en módulo y argumento:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}_1 = 5 \cdot 4 = 20$$

2. Las impedancias se obtienen como cociente entre la tensión y las corrientes respectivas.

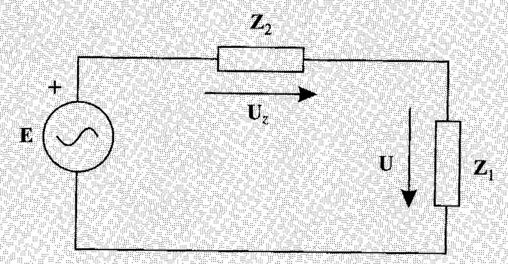
$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}_2} = \frac{20}{j4} = -j5$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}_3} = \frac{20}{4(1-j)} = \frac{5}{2}(1+j)$$

3. Y por último la tensión de la fuente, que se halla por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.

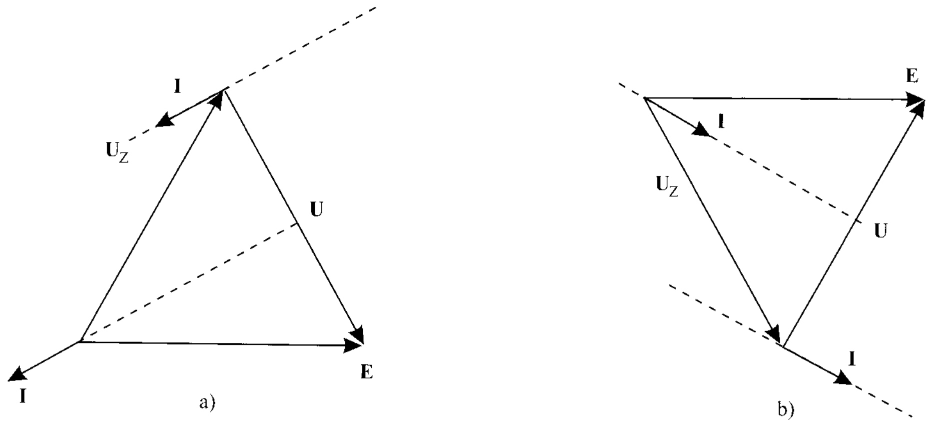
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{U} = (3 + j4)4 + 20 = 16(2 + j)$$

2.7. En el circuito de la figura se sabe que $E = U = U_Z$ y que la impedancia $\mathbf{Z}_1$ es inductiva. Calcúlese el argumento de **U** y $\mathbf{U}_z$.



SOLUCIÓN

Si los módulos de las tres tensiones son iguales, dichas tensiones deben formar un triángulo equilátero. Si se toma **E** como referencia, el triángulo se puede formar con el vértice hacia arriba o hacia abajo, es decir, según la figura a) o b):



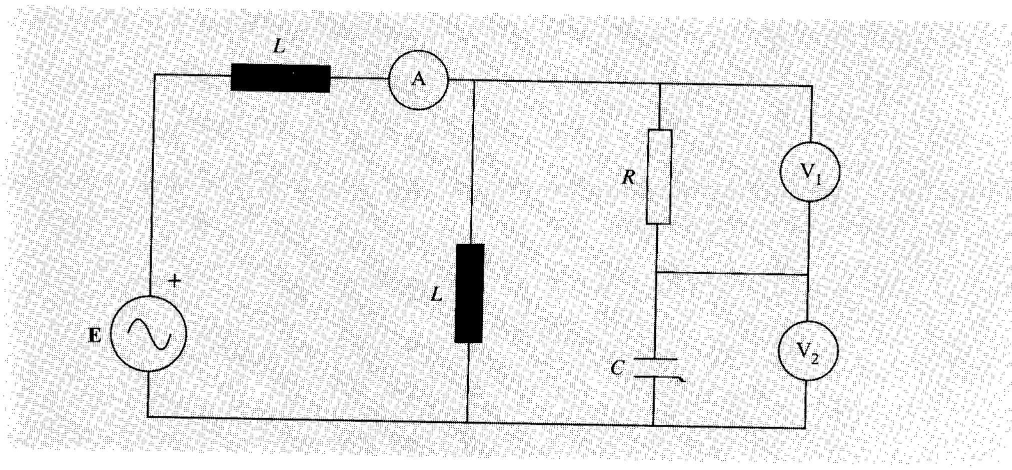
Como la impedancia $\mathbf{Z}_1$ es inductiva, la corriente **I** debe estar retrasada 90° con respecto a la tensión **U**. En la primera figura esto es imposible, pues en tal caso la tensión de la fuente y la corriente formarían un ángulo mayor de 90°. En cambio en el diagrama b) la tensión de la fuente y la corriente forman un ángulo menor de 90°. Por tanto, se elige la segunda opción.

Entonces si $\mathbf{E} = E\underline{/0^\circ}$ V, se tiene que $\mathbf{U}_z = E\underline{/-60^\circ}$ V y $\mathbf{U} = E\underline{/60^\circ}$ V.

2.8. En el circuito de la figura la frecuencia de la fuente es de $\omega = 1.000$ rad/s. Esta fuente tiene un valor de 200 V y suministra potencia con un factor de potencia $\cos\varphi = 0,8$ inductivo. Las lecturas de los aparatos de medida son:

Voltímetro $V_1 = 96$ V; voltímetro $V_2 = 128$ V; amperímetro A = 19,2 A

Calcúlense los valores de R, L y C, y dibújese el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.



SOLUCIÓN

Las lecturas de los aparatos de medida dan los siguientes valores eficaces:

Corriente de salida de la fuente: $I = 19{,}2$ A

Tensión en la resistencia: $U_1 = 96$ V

Tensión en el condensador: $U_2 = 128$ V

La potencia suministrada por la fuente es: $P = E \cdot I \cdot \cos\varphi = 200 \cdot 19{,}2 \cdot 0{,}8 = 3.072$ W

Esta potencia la consume la resistencia, luego:

$$R = \frac{U_1^2}{P} = \frac{96^2}{3.072} = 3\ \Omega$$

El valor eficaz de la intensidad que circula por la rama RC es:

$$I_{RC} = \frac{U_1}{R} = \frac{96}{3} = 32\ \text{A}$$

Luego:

$$X_C = \frac{U_2}{I_{RC}} = \frac{128}{32} = 4\ \Omega \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{1.000 \cdot 4} = 250\ \mu\text{F}$$

La tensión en la rama RC se calcula a partir de la expresión:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{96^2 + 128^2} = 160\ \text{V}$$

Esta tensión es la que soporta la bobina que está en paralelo con la rama RC. Se puede plantear el balance de potencias reactivas, siendo $X_L = \omega L$ la reactancia de la bobina:

$$I^2 X_L + \frac{U^2}{X_L} - I_{RC}^2 X_C = E \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$19{,}2^2 X_L + \frac{160^2}{X_L} - 32^2 4 = 200 \cdot 19{,}2 \cdot 0{,}6$$

$$368{,}64 X_L + \frac{160^2}{X_L} - 4.096 = 2.304$$

Resolviendo la ecuación anterior se encuentran dos valores posibles para X_L:

$$X_L = 11{,}11\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = 11{,}11\ \text{mH} \qquad (1)$$

$$X_L = 6{,}25\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = 6{,}25\ \text{mH} \qquad (2)$$

Para dibujar el diagrama vectorial de tensiones e intensidades se escriben todas las mag tudes en forma fasorial:

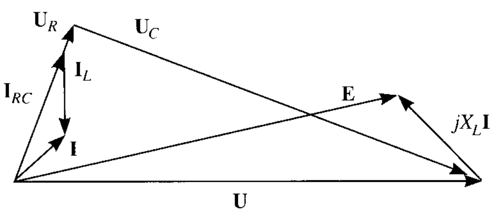
$$\mathbf{U} = 160\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

$$\mathbf{I}_{RC} = \frac{\mathbf{U}}{R - jX_C} = \frac{160}{3 - j4} = 19{,}2 + j25{,}6 = 32\underline{/53{,}13^\circ}\ \text{A}$$

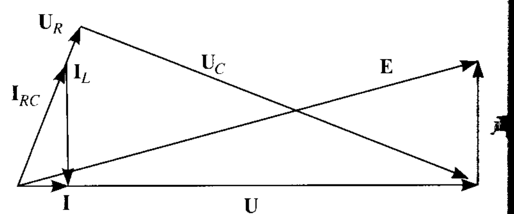
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{U}}{jX_L} = \begin{cases} \dfrac{160}{j11{,}11} = -j14{,}4\ \text{A} \quad (1) \\[2ex] \dfrac{160}{j6{,}25} = -j25{,}6\ \text{A} \quad (2) \end{cases}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{RC} + \mathbf{I}_L = \begin{cases} 19{,}2 + j25{,}6 - j14{,}4 = 19{,}2 + j11{,}2 = 22{,}23\underline{/30{,}26^\circ}\ \text{A} \quad (1) \\ 19{,}2 + j25{,}6 - j25{,}6 = 19{,}2 = 19{,}2\underline{/0^\circ}\ \text{A} \quad (2) \end{cases}$$

El diagrama vectorial en ambos casos es:

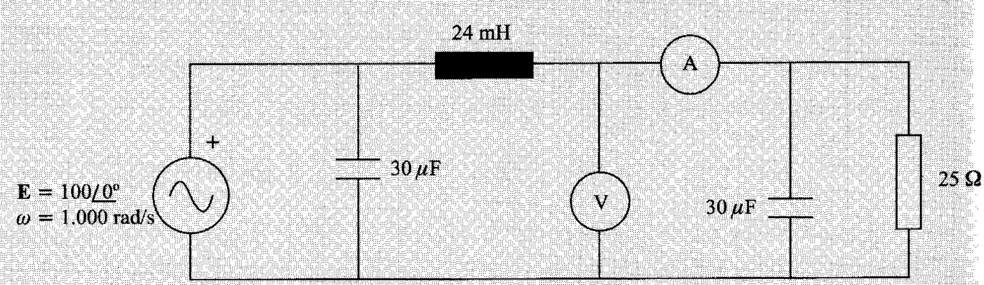


Caso (1)



Caso (2)

2.9. En el circuito de la figura obténganse las lecturas de los aparatos de medida y los diag mas de tensiones e intensidades.



SOLUCIÓN

En primer lugar, se va a hallar la impedancia del circuito, y a partir de ella, las corrientes tensiones. Empezando por la derecha, la admitancia equivalente de la asociación en paral de la resistencia y el condensador es:

$$\mathbf{Y}_{RC} = \frac{1}{R} + j\omega C = 1/25 + j1.000 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 0{,}04 + j0{,}03\ \text{S}$$

Luego la impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{RC}$:

$$\mathbf{Z}_{RC} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{RC}} = 16 - j12\ \Omega$$

La asociación serie de esta impedancia con la impedancia de la bobina da como resultado una impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{LRC}$:

$$\mathbf{Z}_{LRC} = j\omega L + \mathbf{Z}_{RC} = j1.000 \cdot 24 \cdot 10^{-3} + 16 - j12 = 16 + j12\ \Omega$$

$$\mathbf{Y}_{LRC} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{LRC}} = \frac{1}{16 + j12} = 0{,}04 - j0{,}03\ \text{S}$$

Luego la intensidad por la rama LRC (que es la que circula por la bobina, $\mathbf{I}_L$) es:

$$\mathbf{I}_{LRC} = \mathbf{I}_L = \mathbf{Y}_{LRC} \cdot \mathbf{E} = (0{,}04 - j0{,}03) \cdot 100 = 4 - j3 = 5\underline{/-36{,}87^\circ}\ \text{A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro es 5 A.

La tensión de la impedancia $\mathbf{Z}_{RC}$:

$$\mathbf{U}_{RC} = \mathbf{I}_{LRC} \cdot \mathbf{Z}_{RC} = (4 - j3) \cdot (16 - j12) = 28 - j96 = 100\underline{/-73{,}74^\circ}\ \text{V}$$

es decir, la lectura del voltímetro es 100 V.

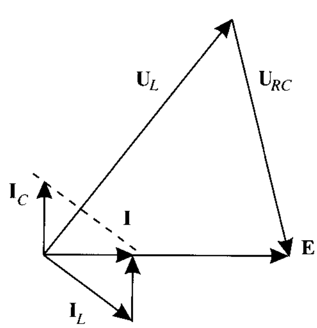
Para hallar el diagrama vectorial se calcula la intensidad en el condensador que está en paralelo con la fuente, teniendo en cuenta que la tensión de dicho condensador es $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{E}}{-jX_C} = j\omega C\mathbf{E} = j1.000 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = j3 = 3\underline{/90^\circ}\ \text{A}$$

La corriente que sale de la fuente, $\mathbf{I}$, es la suma de $\mathbf{I}_C$ y $\mathbf{I}_L$:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L = j3 + (4 - j3) = 4\ \text{A} = 4\underline{/0^\circ}\ \text{A}$$

Y el diagrama vectorial de tensiones e intensidades es el que se muestra en la figura.



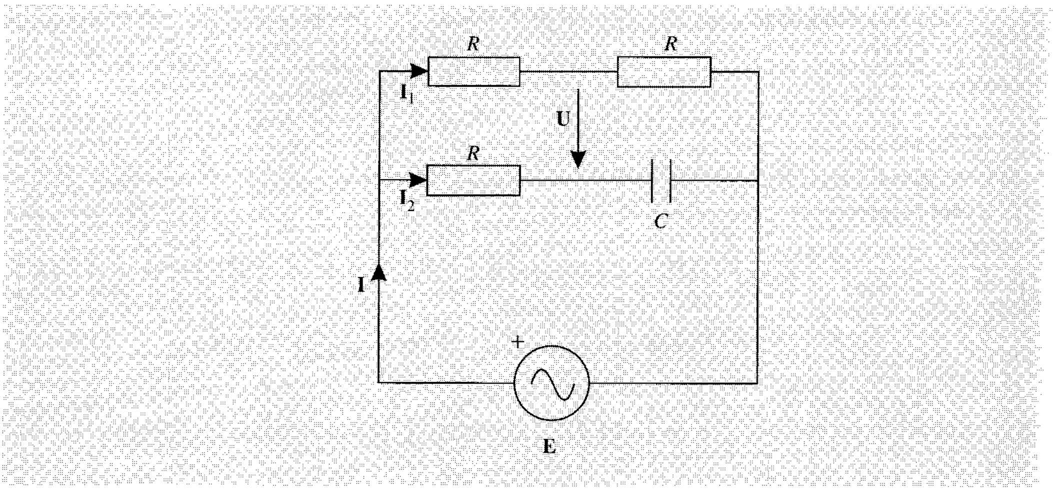
En el circuito de la figura:

a) Dibujar el diagrama vectorial.

b) Calcular la relación entre R y C para que las tensiones $\mathbf{E}$ y $\mathbf{U}$ estén desfasadas 90°.

c) Calcular las relaciones E/U e I_1/I_2 en el caso anterior.

d) Calcular la relación E/U cuando ambas tensiones formen un ángulo de 45°.

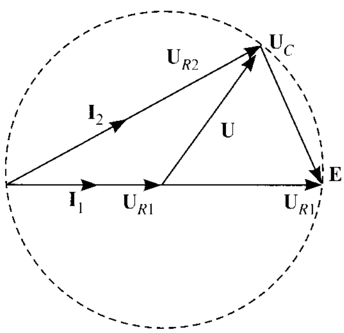


SOLUCIÓN

Este problema es de resolución compleja si trata de realizarse analíticamente. Por el contrari requiere muy pocos cálculos si se utiliza el diagrama vectorial.

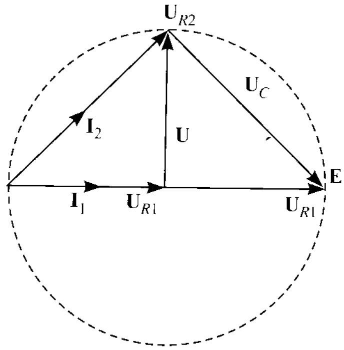
a) En primer lugar, se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades en el ca general, esto es, en el que no se cumple la condición impuesta en el apartado b). Sea $\mathbf{U}_{R1}$ tensión en cada una de las resistencias de la rama superior, que son iguales por tratarse dos resistencias del mismo valor por las que circula la misma corriente $\mathbf{I}_1$. Estas tensiones toman como origen de fases. Además, la suma de ambas deberá ser igual a **E**, y porque h sólo resistencias en esa rama, tanto la corriente $\mathbf{I}_1$ como las dos tensiones estarán en fase co **E**. Sea, por otro lado, $\mathbf{U}_{R2}$ la tensión en la resistencia de la rama inferior: esta tensión est en fase con la corriente que circula por la resistencia, y adelantada un cierto ángulo con re pecto a la tensión **E**, ya que se trata de una corriente capacitiva. La tensión en el conden dor, $\mathbf{U}_C$ estará retrasada 90° con respecto a la corriente que circula por ella, $\mathbf{I}_2$, y la suma $\mathbf{U}_{R2}$ y de $\mathbf{U}_C$ deberá ser igual a **E**.

Dependiendo del valor relativo de R y de C, la corriente $\mathbf{I}_2$ estará más o menos adelant con respecto a **E**. Sin embargo, y dado que $\mathbf{U}_{R2}$ y $\mathbf{U}_C$ tienen que estar desfasadas 90°, y q su suma tiene que ser igual a **E**, el punto de contacto de los fasores $\mathbf{U}_{R2}$ y $\mathbf{U}_C$, tal como se dibujado en la figura siguiente, tiene que estar en una semicircunferencia de diámetro E.



En cuanto a la tensión **U**, se puede verificar que es la que se muestra en la figura, aplica do la segunda ley de Kirchhoff, $\mathbf{E} = \mathbf{U}_{R1} + \mathbf{U} + \mathbf{U}_C$.

b) Una vez que se ha dibujado el caso general, se puede aplicar la condición que se pide e el problema. En este caso, el diagrama vectorial en el que se cumple esta condición de pe pendicularidad es el siguiente:



Para que **E** y **U** estén desfasadas 90° se tiene que cumplir la igualdad de las tensiones de R y C:

$$U_{R2} = U_C$$

$$I_2R = I_2X_C$$

$$R = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{RC = \frac{1}{\omega}}$$

c La tensión **E** coincide con el diámetro de la circunferencia, mientras que la tensión **U** coincide con uno de los radios, por lo que la relación de tensiones es:

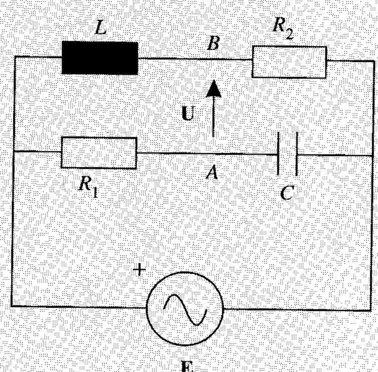
$$\frac{E}{U} = 2$$

Las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, deben formar 45° por lo que la relación entre ellas es:

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{R\mathbf{I}_1}{R\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{U}_{R1}}{\mathbf{U}_{R2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d A la vista de los diagramas anteriores se observa que la relación de tensiones es independiente del ángulo que formen, luego, para cualquier ángulo se satisface que $\frac{E}{U} = 2$.

En el circuito de la figura:

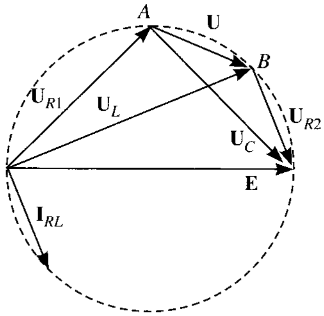


a) Hállese el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

b) Para $\mathbf{U} = \mathbf{E}/2$ calcúlese L y C en función de R_1, R_2 y ω.

Solución

Este problema es similar al anterior, en el que la resolución debe abordarse a partir diagrama vectorial del circuito. En primer lugar, se dibujará el diagrama vectorial sin ner en cuenta la condición impuesta en el apartado b), que es el que se representa a co nuación:



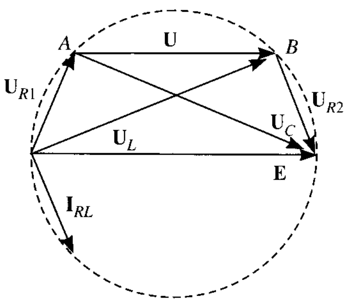
En este diagrama vectorial se ha tomado como origen de fases la tensión de la fuente. La corriente de la rama capacitiva, que no se representa por no complicar la figura, es adelantada con respecto a esta tensión, y su circulación producirá sendas caídas de tensión la resistencia y el condensador. La caída de tensión resistiva estará en fase con esta corrie en tanto que la capacitiva estará retrasada 90° con respecto a ella. La suma de estas dos siones, $\mathbf{U}_{R1}$ y $\mathbf{U}_C$ será igual a $\mathbf{E}$, por simple aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.

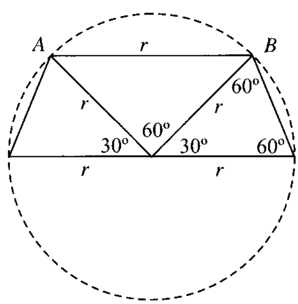
Por otro lado, la corriente de la rama resistiva, $\mathbf{I}_{RL}$, estará retrasada un cierto ángulo respecto a la tensión $\mathbf{E}$. La circulación de esta corriente por la inductancia L producirá caída de tensión adelantada 90° con respecto a ella, en tanto que la caída de tensión en resistencia R_2 estará en fase con $\mathbf{I}_{RL}$. Aquí también, la suma de $\mathbf{U}_L$ y de $\mathbf{U}_{R2}$ deberá ser ig a $\mathbf{E}$.

La tensión $\mathbf{U}$ es el vector situado entre los puntos A y B, que se puede comprobar simp mente aplicando la segunda ley de Kirchhoff, según la cual $\mathbf{E} = \mathbf{U}_{R1} + \mathbf{U} + \mathbf{U}_{R2}$.

De la misma manera que en el problema anterior, las relaciones entre R_1 y C, y entre R_2 L determinarán el desfase relativo entre las corrientes por cada rama y la tensión de la fue Sin embargo, dado que las tensiones entre estos elementos tienen que ser perpendiculares tre sí, y que su suma es igual a la tensión $\mathbf{E}$, los puntos A y B de intersección de am tensiones, deberán estar en una circunferencia de diámetro E.

Una vez dibujado este diagrama vectorial, se aplicará la condición impuesta en el apart b), esto es, que $\mathbf{U} = \mathbf{E}/2$, condición que se debe cumplir tanto en módulo como en argumen El diagrama vectorial resultante de imponer estas condiciones se muestra en las figuras guientes.





Por un razonamiento geométrico elemental (para cuya comprensión se facilita la figura de la derecha), se puede comprobar que se debe cumplir que:

$$U_{R1}\,\mathrm{sen}\,60^\circ = U_C \cos 60^\circ$$

Es decir:

$$I_C R_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = I_C \frac{1}{\omega C}\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega R_1 \sqrt{3}}}$$

Pero además, se debe cumplir que:

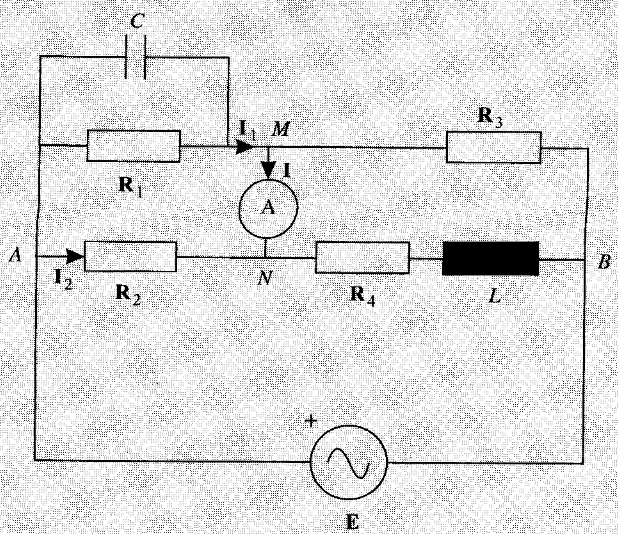
$$U_{R2}\,\mathrm{sen}\,60^\circ = U_L \cos 60^\circ$$

$$I_L R_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = I_L \omega L \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{R_2 \sqrt{3}}{\omega}}$$

El circuito de la figura es un puente que se utiliza para medir el coeficiente de autoinducción de una bobina y su resistencia de pérdidas (L y R_4), mediante la variación de los valores de C y R_1 de forma que la corriente I que pase por el amperímetro sea nula.

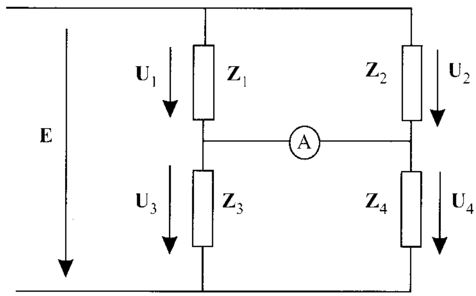
Encontrar las ecuaciones que permiten conocer estos valores en función de C, R_1, R_2 y R_3.

¿Se podría utilizar el mismo circuito para medir la capacidad de un condensador y su resistencia de pérdidas, si se conocen R_2, R_3, R_4 y L?



Solución

a) En primer lugar se obtiene el circuito de alterna equivalente al de la figura.



Se puede observar que, cuando la corriente que señala el amperímetro es nula, esta asociación de resistencias se convierte en dos divisores de la tensión **E**. Por tanto, los valores de tensión en las impedancias 1 y 2 serán:

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}\,\mathbf{E} \qquad\qquad \mathbf{U}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4}\,\mathbf{E}$$

Y puesto que la corriente en el amperímetro es cero, la tensión entre sus extremos también lo será por lo que las tensiones $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ serán iguales, es decir:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$$

que equivale a escribir

$$\mathbf{Z}_4 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_1$$

$$R_4 + j\omega L = R_2R_3\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C\right)$$

Al igualar partes reales e imaginarias se obtiene:

$$R_4 = \frac{R_2R_3}{R_1} \qquad\qquad L = R_2R_3C$$

b) Se procede de forma análoga, llegándose en esta ocasión a las igualdades siguientes:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_4} = \frac{R_2R_3}{\mathbf{Z}_4}$$

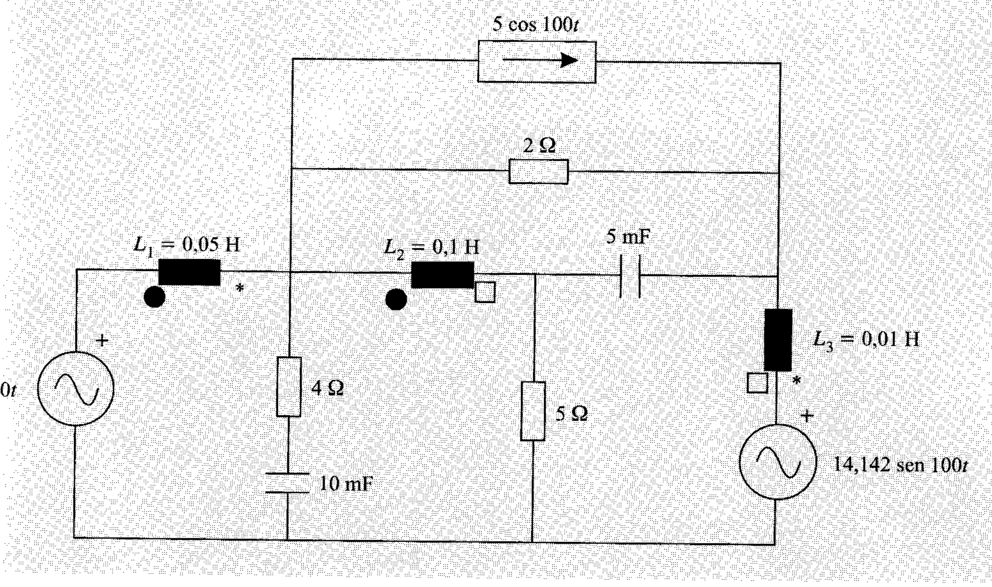
$$\mathbf{Y}_1 = \frac{\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3} = \frac{R_4 + j\omega L}{R_2R_3} = \frac{1}{R_1} + j\omega C$$

que proporcionan los valores de R_1 y C, en función de los restantes parámetros:

$$R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} \qquad\qquad C = \frac{L}{R_2R_3}$$

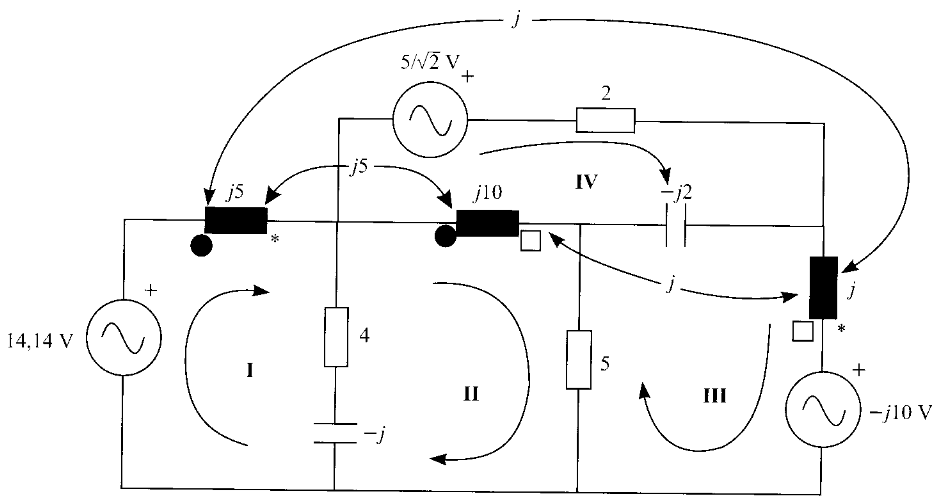
. En el circuito de la figura plantear las ecuaciones correspondientes al análisis por mallas en régimen estacionario sinuosidal.

Datos: $M_{12} = 50$ mH, $M_{13} = 10$ mH, $M_{23} = 10$ mH



SOLUCIÓN

En primer lugar se obtiene el circuito de alterna.



Se plantean las ecuaciones por mallas del circuito:

$$(4 - j + j5)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (4 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j5\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 20/\sqrt{2}$$

$$(4 + 5 + j10 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - (4 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - 5\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} + j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} = 0$$

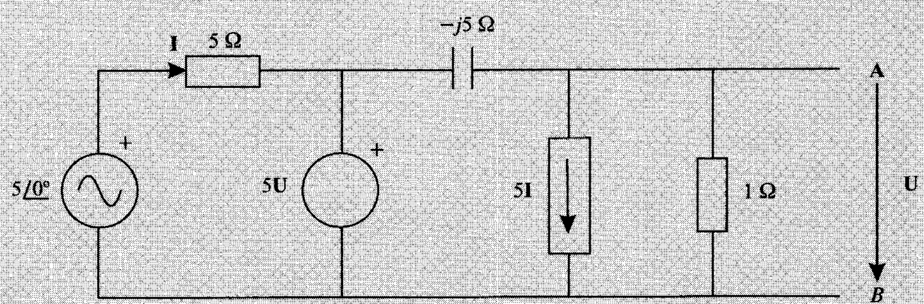
$$(5 - j2 + j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - 5\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j2\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - j\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = j10$$

$$(2 + j10 - j2)\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j2\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} = 5\sqrt{2}$$

Se simplifican estas ecuaciones, llegándose a:

$$(4 + j4)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (4 - j6)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 20/\sqrt{2}$$
$$-(4 + j6)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + (9 + j9)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 0$$
$$j\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = j10$$
$$-j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} + (2 + j8)\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 5\sqrt{2}$$

2.14. Determinar el equivalente Norton del circuito de la figura visto desde los terminales A y



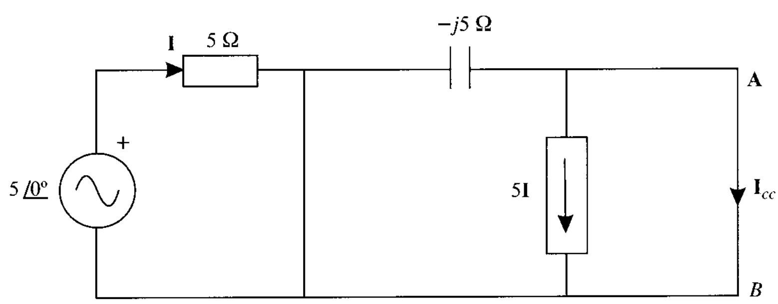
Todas las fuentes son senoidales y de la misma frecuencia.

En el cálculo de la impedancia equivalente su valor puede salir negativo debido a
engloba a las fuentes dependientes.

Solución

Corriente de cortocircuito

Al cortocircuitar los terminales A y B, la tensión U entre esos terminales vale cero y por
se anula la fuente de tensión de valor 5**U**, convirtiéndose dicha fuente en otro cortocirc
Por otra parte, la resistencia de valor 1 Ω, entre A y B, se puede eliminar ya que por ella
circula corriente. El circuito equivalente es:



La corriente de cortocircuito es:

$$\mathbf{I}_{cc} = -5\mathbf{I}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla:

$$5\underline{/0} = 5\mathbf{I}$$

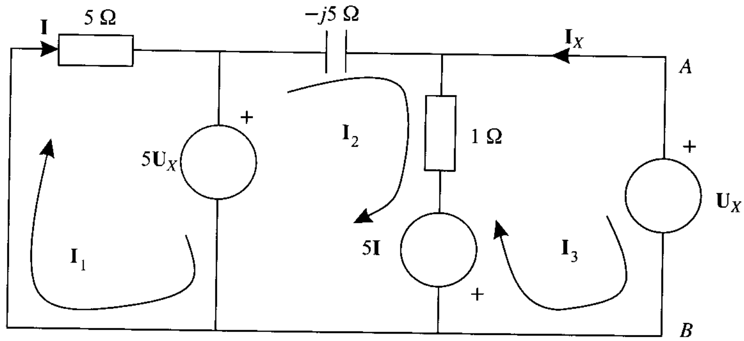
de donde:

$$\mathbf{I} = 1 \text{ A}$$

Y la corriente de cortocircuito es $\mathbf{I}_{cc} = -5$.

Impedancia Norton equivalente

Se anulan las fuentes independientes y se conecta una fuente de tensión $\mathbf{U}_x$ entre A y B. La fuente real de intensidad se convierte a fuente de tensión y se resuelve por el método de mallas, buscando la expresión de la corriente $\mathbf{I}_x$ en función de $\mathbf{U}_x$, pues $\mathbf{Z}_N = \mathbf{U}_x/\mathbf{I}_x$:



$$5\mathbf{I}_1 = -5\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{I}_2(-j5 + 1) - \mathbf{I}_3 = 5\mathbf{I} + 5\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 = -\mathbf{U}_x - 5\mathbf{I}$$

Pero:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_x$$

Por tanto:

$$5\mathbf{I} = -5\mathbf{U}_x \qquad (1)$$

$$\mathbf{I}_2(1 - j5) + \mathbf{I}_x = 5\mathbf{I} + 5\mathbf{U}_x \qquad (2)$$

$$\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_2 = \mathbf{U}_x + 5\mathbf{I} \qquad (3)$$

Se sustituye (1) en (2) y (3):

$$\mathbf{I}_2(1 - j5) + \mathbf{I}_x = 0 \qquad (2')$$

$$\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_2 = -4\mathbf{U}_x \qquad (3')$$

Se despeja $\mathbf{I}_2$ de (3') y se sustituye en (2'):

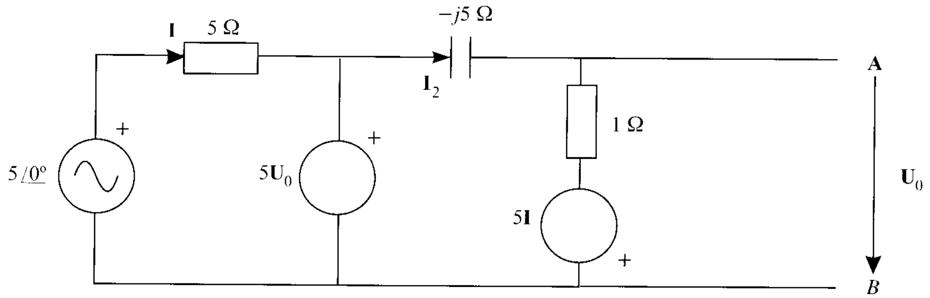
$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_x - 4\mathbf{U}_x$$

$$(-\mathbf{I}_x - 4\mathbf{U}_x)(1 - j5) + \mathbf{I}_x = 0$$

$$\mathbf{I}_x(-j5) = -4(1 - j5)\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{U}_x}{\mathbf{I}_x} = \frac{j5}{4(1 - j5)} = -0{,}2404 + j0{,}0481$$

Como comprobación se calcula la tensión a circuito abierto, $\mathbf{U}_0$. La fuente de corriente real se transforma en una fuente de tensión y se resuelve por mallas:



$$5\mathbf{I} = 5 - 5\mathbf{U}_0 \qquad (1)$$

$$-j5\mathbf{I}_2 = 5\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_0 = 4\mathbf{U}_0 \qquad (2)$$

Por otra parte:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{I}_2 - 5\mathbf{I} \qquad (3)$$

Al sustituir en esta última ecuación las ecuaciones (1) y (2):

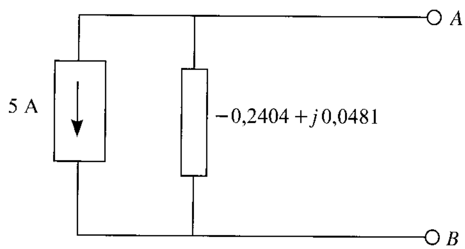
$$\mathbf{U}_0 = j\,\frac{4}{5}\,\mathbf{U}_0 - (5 - 5\mathbf{U}_0)\left(4 + j\,\frac{4}{5}\right)\mathbf{U}_0 = 5$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{5}{4 + j\,\dfrac{4}{5}} = 1{,}2019 - 0{,}2404i$$

Y la impedancia Norton:

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{U}_0}{\mathbf{I}_{cc}} = \frac{1{,}2019 - j0{,}2404}{-5} = -0{,}2404 + j0{,}0481$$

El equivalente Norton del circuito se muestra en la figura.

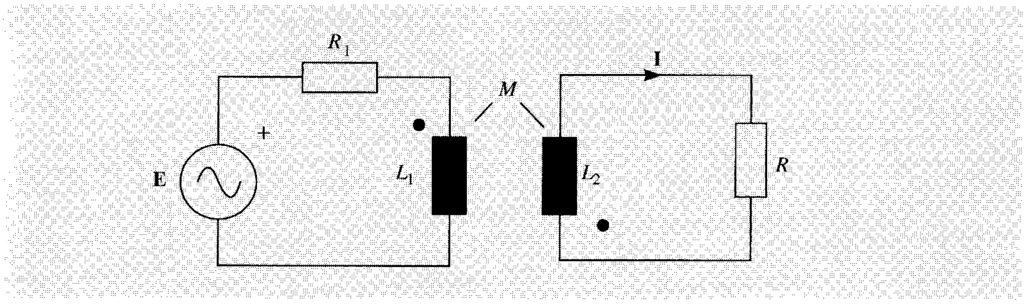


2.15. En el circuito de la figura:

1. Calcúlese el equivalente Thévenin del circuito con respecto a los puntos A y B.
2. Calcúlese la corriente I por aplicación del teorema de Thévenin.

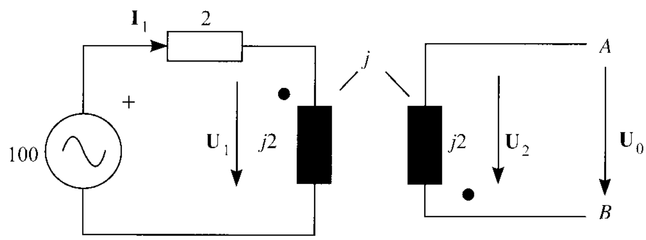
$$L_1 = L_2 = 2 \text{ mH} \qquad M = 1 \text{ mH} \qquad R_1 = 2\ \Omega \qquad R = 1\ \Omega$$

$$E = 100\angle 0^\circ \text{ V} \qquad \omega = 1.000 \text{ rad/s}$$



SOLUCIÓN

1. En primer lugar, se determina la tensión a circuito abierto. El circuito resultante será:



En este circuito se cumple que $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_2$. Además, según las ecuaciones de las bobinas acopladas:

$$\mathbf{U}_2 = -j\mathbf{I}_1$$

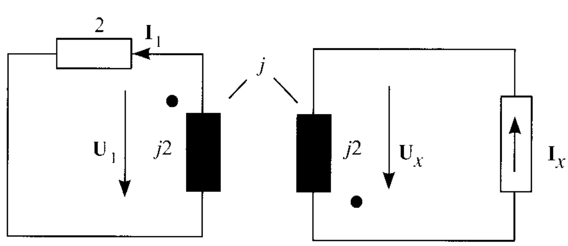
$$\mathbf{U}_1 = j2\mathbf{I}_1$$

Por otra parte, en la primera malla se satisface que:

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{I}_1 + \mathbf{U}_1 = 2\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_1 = (2 + j2)\mathbf{I}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = \frac{100}{2 + j2} = 25 - j25 = 35{,}35\underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}_{th} = -j\mathbf{I}_1 = -25 - j25 = 35{,}35\underline{/-135^\circ} \text{ V}$$

A continuación se obtiene la impedancia Thévenin, para lo cual se hace pasivo el circuito y se inserta una fuente de corriente de valor $\mathbf{I}_x$:



Ecuaciones de las bobinas acopladas:

$$\mathbf{U}_x = j2\mathbf{I}_x + j\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{U}_1 = -j2\mathbf{I}_1 - j\mathbf{I}_x$$

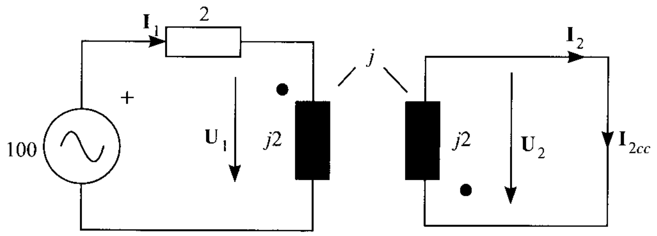
Además $\mathbf{U}_1 = 2\mathbf{I}_1$, y sustituyendo en la segunda ecuación: $\mathbf{I}_1(2 + j2) = -j\mathbf{I}_x$.
Por tanto, si se sustituye el valor de $\mathbf{I}_1$ en la primera ecuación, se tiene:

$$\mathbf{U}_x = \left(j2 + \frac{1}{2 + j2}\right)\mathbf{I}_x$$

Y la impedancia Thévenin será:

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{U}_x}{\mathbf{I}_x} = j2 + \frac{1}{2 + j2} = 0{,}25 + j1{,}75 = 1{,}77\underline{/81{,}87^\circ}\ \Omega$$

Con el fin de verificar los resultados, se obtiene la corriente de cortocircuito:



Planteamiento de las ecuaciones en las bobinas acopladas:

$$(1)\quad \mathbf{U}_2 = -j2\mathbf{I}_2 - j\mathbf{I}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = -2\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{I}_{cc} \quad (3)$$

$$(2)\quad \mathbf{U}_1 = j2\mathbf{I}_1 + j\mathbf{I}_2$$

Por otra parte, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla:

$$(4)\quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{I}_1$$

Si se igualan las ecuaciones (2) y (4) y se sustituye el valor de $\mathbf{I}_1$ dado por (3), se tie

$$-j2 \cdot 2\mathbf{I}_{cc} + j\mathbf{I}_{cc} = \mathbf{E} + 4\mathbf{I}_{cc}$$

$$\mathbf{I}_{cc} = \frac{\mathbf{E}}{-4 - j3} = -16 + j12 = 20\underline{/143{,}13^\circ}\ \mathrm{A}$$

Comprobación: $\mathbf{Z}_{th} = \dfrac{\mathbf{E}_{th}}{\mathbf{I}_{cc}} = 1{,}77\underline{/81{,}87^\circ}\ \Omega$

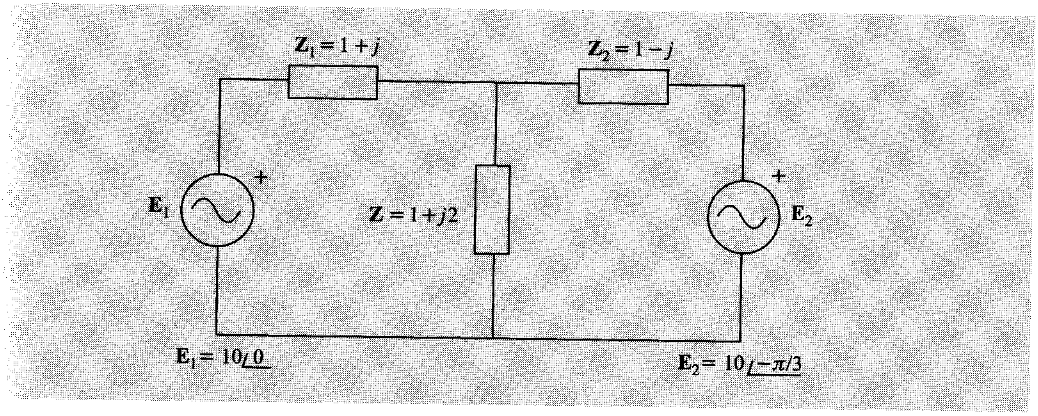
2. La corriente **I**, una vez conocida el equivalente Thévenin del circuito respecto a los minales *A* y *B* viene dada por:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + R} = \frac{-25 - j25}{0{,}25 + j1{,}75 + 1} = \frac{-25 - j25}{1{,}25 + j1{,}75} = -16{,}22 + j2{,}70 = 16{,}44\underline{/170{,}54^\circ}\ \mathbf{A}$$

2.16. En el circuito de la figura, hallar la intensidad que circula por la impedancia $\mathbf{Z} = 1 +$

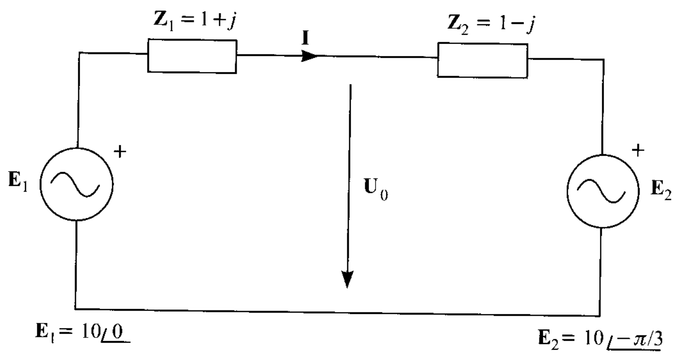
a) Por aplicación del teorema de Thévenin.

b) Por aplicación del teorema de Millman.



SOLUCIÓN

a) En primer lugar se resolverá aplicando el teorema de Thévenin.
Se halla la tensión a circuito abierto, para lo que se debe resolver el siguiente circuito.



En vista de la figura anterior, la corriente **I** viene dada por:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)} = \frac{10\underline{/0} - 10\underline{/-\pi/3}}{(1 + j) + (1 - j)} = 5\underline{/\pi/3} \text{ A}$$

Luego la tensión Thévenin (o tensión a circuito abierto) es:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} = \mathbf{E}_2 + \frac{\mathbf{Z}_2(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} =$$

$$= \frac{(1 - j)10 + (1 + j)10\underline{/-\pi/3}}{2} = 11{,}83 - j6{,}83 = 13{,}66\underline{/-30^\circ} \text{ V}$$

A continuación se obtiene la impedancia de Thévenin, como la asociación en paralelo de las dos impedancias.

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(1 + j)(1 - j)}{2} = 1 \ \Omega$$

La intensidad que recorre la impedancia **Z** es finalmente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}_0}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}} = \frac{13{,}66\underline{/-30^\circ}}{1 + (1 + j2)} = 4{,}82\underline{/-75^\circ} \text{ A}$$

b) Aplicando el teorema de Millman:

La tensión entre los extremos de la impedancia **Z** es:

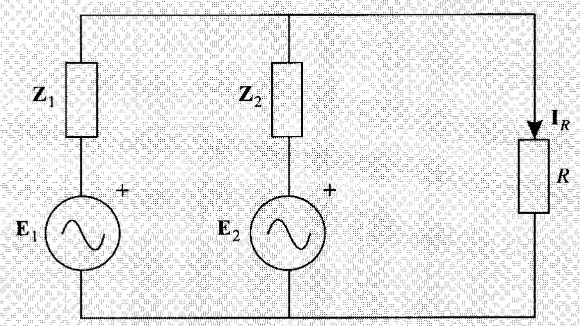
$$\mathbf{U} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_3}} = \frac{\dfrac{10}{1+j} + \dfrac{10\underline{/-\pi/3}}{1-j}}{\dfrac{1}{1+j} + \dfrac{1}{1-j} + \dfrac{1}{1+j2}} = 10{,}8\underline{/-11{,}56^\circ}\ \text{V}$$

Y la intensidad que circula por la impedancia:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{10{,}8\underline{/-11{,}56^\circ}}{1+j2} = 4{,}82\underline{/-75^\circ}\ \text{A}$$

2.17. En el circuito de la figura, calcular, en régimen permanente, la intensidad instantánea que circula por la resistencia R, así como los valores correspondientes a $t = 1$ ms y $t =$ ms.

$e_1 = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,1.000t$, $e_2 = 20\sqrt{2}\,\text{sen}\,1.000t$, $\mathbf{Z}_1 = 1 + j$, $\mathbf{Z}_2 = 1 - j$, R =



Solución

Aplicando la fórmula de Millman al circuito de la figura, se calcula la tensión **U** que cae la resistencia:

$$\mathbf{U} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dfrac{1}{R}} = \frac{\dfrac{10}{1+j} + \dfrac{20}{1-j}}{\dfrac{1}{1+j} + \dfrac{1}{1-j} + 1} = 10\ \text{V}$$

La corriente que circula por la resistencia es, por tanto $I_R = 10/1 = 10$ A.
El valor instantáneo de dicha corriente tendrá como expresión:

$$i_R(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,1.000t$$

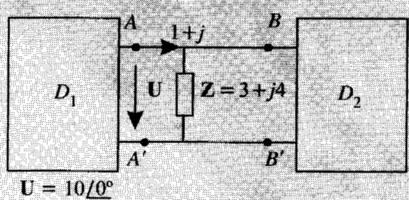
y los valores para $t = 1$ ms y $t = 2$ ms son, respectivamente:

$$i_R(1) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,(1.000 \cdot 0{,}001) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,1 = 11{,}90\ \text{A}$$

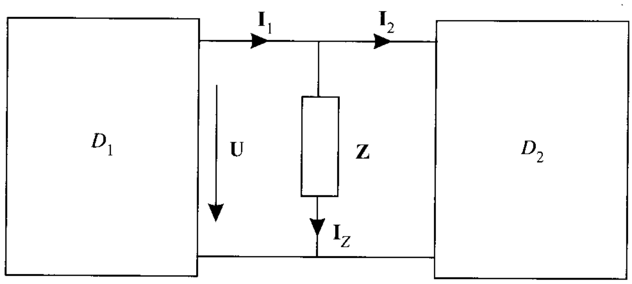
$$i_R(2) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,(1.000 \cdot 0{,}002) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,2 = 12{,}86\ \text{A}$$

En el circuito de la figura:

1. Señálese qué dipolos actúan como generador y como receptor.
2. En caso de receptor, indíquese si es inductivo o capacitivo.
3. En caso de generador, indíquese si la carga conectada a él es de carácter inductivo o capacitivo.
4. Balance de potencias.



SOLUCIÓN



Con las referencias de la figura, la corriente en la impedancia será $\mathbf{I}_z = \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$, luego la corriente $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 - \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = (1 + j) - \frac{10}{3 + j4} = -0{,}2 + j2{,}6$$

Potencias:

$\mathbf{S}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}_1^* = 10(1 - j)$	$P = 10$ W	(generador)
	$Q = -10$ VAr	(consumidor inductivo)
$\mathbf{S}_2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}_2^* = 10(-0{,}2 - j2{,}6)$	$P = -2$ W	(generador)
	$Q = -26$ VAr	(consumidor inductivo)

Potencia generada total: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 12 + j16$

Potencia consumida en la impedancia:

$\mathbf{S} = \mathbf{U}\left(\dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}\right)^* = \dfrac{U^2}{\mathbf{Z}^*} = \dfrac{100}{3 - j4} = 12 + j16$	$P = 12$ W	(carga)
	$Q = 16$ VAr	(inductiva)

2.19. En un dipolo en régimen estacionario sinuosidal los valores instantáneos de tensión y tencia son:

$$u(t) = 100 \operatorname{sen} 100\pi t \quad (\mathrm{V}) \qquad p(t) = 125 - 250 \cos(200\pi t - \pi/3) \quad (\mathrm{W})$$

Se pide:

a) Factor de potencia y potencia activa y reactiva.

b) Intensidad instantánea.

c) Energía consumida por el dipolo al cabo de 3 horas.

d) Valores de R y L suponiendo que el dipolo se representa por la asociación en paral de una resistencia y una bobina.

SOLUCIÓN

a) Se parte de las expresiones genéricas de tensión y de corriente.

$$u(t) = \sqrt{2}U \operatorname{sen} \omega t$$
$$i(t) = \sqrt{2}I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

La expresión de la potencia instantánea es:

$$p(t) = 2UI \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = UI \cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) - UI \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\omega t =$$
$$= UI\cos\varphi - UI\cos\varphi\cos 2\omega t - UI\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} 2\omega t$$

que se identifica con la expresión dada:

$$p(t) = 125 - 125\cos 200\pi t - 125\sqrt{3}\operatorname{sen} 200\pi t$$

Esto equivale a:

$$UI\cos\varphi = 125$$
$$UI\operatorname{sen}\varphi = 125\sqrt{3}$$

De ambas:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \qquad \cos\varphi = 1/2 \qquad \varphi = \pi/3$$

Y por tanto:

$$P = UI\cos\varphi = 125 \text{ W}$$
$$Q = UI\operatorname{sen}\varphi = 125\sqrt{3} \text{ VAr}$$

b) $I = \dfrac{P}{U\cos\varphi} = \dfrac{125}{\dfrac{100}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ A

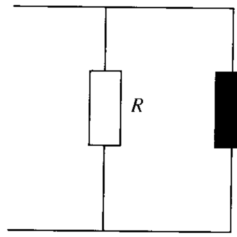
$$i(t) = 5\operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

c) La potencia activa es el valor medio de la potencia instantánea en un ciclo. Dado 3 horas comprende un número entero de ciclos (además de que el período de un ciclo de Hz es de 20 ms, despreciable frente a 3 horas), la energía total se podrá calcular como:

$$W = P \cdot t = 125 \cdot 3 \cdot 3.600 = 1.350 \text{ kJ}$$

d) $$P = \frac{U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{125} = 40\ \Omega$$

$$X = \frac{U^2}{Q} = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{125\sqrt{3}} = 23{,}09\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X}{\omega} = \frac{23{,}09}{100\pi} = 0{,}0735\ \text{H}$$



Una bobina de 6,322 mH está conectada a una fuente de tensión sinusoidal de 50 Hz y 4 V de valor eficaz. Determinar:

a) Las expresiones de tensión e intensidad instantáneas tomando como origen de fases la tensión.

b) El valor de la amplitud de la potencia instantánea y su significado eléctrico.

Demostrar, a partir de la potencia instantánea, que la potencia activa es nula.

SOLUCIÓN

a) La tensión de la fuente es $\mathbf{E} = 4\underline{/0^\circ}$ V, que coincide con la tensión en la bobina $\mathbf{U}$, luego la intensidad que demanda la bobina viene dada por la expresión:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{j\omega L} = \frac{4}{j \cdot 100\pi \cdot 6{,}322 \cdot 10^{-3}} = -j2\ \text{A} = 2\underline{/-90^\circ}\ \text{A}$$

Los valores instantáneos de tensión y corriente son:

$$u(t) = 4\sqrt{2}\cos 100\pi t\ \text{V}$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{A} = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,100\,\pi t\ \text{A}$$

b) La potencia instantánea entrante en la bobina es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = (4\sqrt{2}\cos 100\pi t) \cdot (2\sqrt{2}\,\text{sen}\,100\pi t) = 16\cos 100\pi t\,\text{sen}\,100\pi t = 8\,\text{sen}\,200\pi t\ \text{W}$$

La variación de p es puramente sinusoidal, de frecuencia doble a la de la frecuencia de u e i. La amplitud de p es $UI = 8$, valor que coincide con la potencia reactiva que consume la bobina.

La potencia activa es el valor medio de la potencia instantánea:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{0{,}02}\int_0^{0{,}02} 8\,\text{sen}\,200\pi t\,dt = \frac{8}{0{,}02 \cdot 200\pi}\,[-\cos 200\pi t]_0^{0{,}02} =$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\cos 4\pi + \cos 0] = 0$$

2.21. Un dipolo de terminales A y B se encuentra en régimen estacionario sinusoidal. El dip
es el resultado de asociar en paralelo una resistencia R, una bobina L y un condensador
Sabiendo que:

$u_{AB} = 200 \cdot \text{sen}\, 100t$ (V) tensión instantánea del dipolo

$i_{AB} = 5 \cdot \text{sen}\,(100t - \pi/6)$ (A) intensidad instantánea del dipolo

$p_c = 1.000 \cdot \text{sen}\, 200t$ (W) potencia instantánea entrante al condensador

Determinar:

1. Valores de R, L y C.
2. Expresiones de la potencia instantánea entrante en la resistencia y en la bobina.
3. Potencias activa y reactiva entrantes en cada elemento.

SOLUCIÓN

Los fasores asociados a la tensión y a la corriente son:

$$\mathbf{U}_{AB} = \frac{200}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ} \text{ V} \qquad \mathbf{I}_{AB} = \frac{5}{\sqrt{2}} \underline{/-30^\circ} \text{ A}$$

La potencia aparente consumida por el dipolo viene dada por la expresión:

$$\mathbf{S}_{AB} = \mathbf{U}_{AB} \cdot \mathbf{I}_{AB}^* = \frac{200}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \underline{/30^\circ} = 500\underline{/30^\circ} = 250\sqrt{3} + j250$$

Luego $P_{AB} = 250\sqrt{3}$ W y $Q_{AB} = 250$ VAr.

Como la potencia activa que consume el dipolo es la que consume la resistencia, se tie
que:

$$P_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U_{AB}^2}{P_{AB}} = \frac{(200/\sqrt{2})^2}{250\sqrt{3}} = 46{,}2\ \Omega$$

Por otra parte, a partir de la expresión de la potencia instantánea entrante al condensad
p_c, se deduce la expresión de las potencias activa y reactiva de dicho elemento:

$$P_C = 0 \text{ W} \qquad \text{y} \qquad Q_C = 1.000 \text{ VAr}$$

Pero:

$$Q_C = \omega C U_{AB}^2$$

de donde

$$C = \frac{Q_C}{\omega U_{AB}^2} = \frac{1.000}{100(200/\sqrt{2})^2} = 0{,}5 \text{ mF}$$

Por último, para calcular el valor de L hallamos la potencia reactiva que consume dic
elemento:

$$Q_{AB} = Q_L - Q_C \quad \Rightarrow \quad Q_L = Q_{AB} + Q_C = 250 + 1.000 = 1.250 \text{ VAr}$$

Como

$$Q_L = \frac{U_{AB}^2}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{U_{AB}^2}{\omega Q_L} = \frac{(200/\sqrt{2})^2}{100 \cdot 1.250} = 0{,}16 \text{ H}$$

Para hallar las expresiones de las potencias entrantes en la resistencia y en la bobina, hallamos la corriente en cada uno de los elementos:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{U}_{AB}}{R} = \frac{\frac{200}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ}}{46{,}2} = \frac{4{,}33}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ} \quad \Rightarrow \quad i_R(t) = 4{,}33 \cdot \text{sen}\, 100t$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{U}_{AB}}{j\omega L} = \frac{\frac{200}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ}}{j100 \cdot 0{,}16} = \frac{12{,}5}{\sqrt{2}} \underline{/-90^\circ} \quad \Rightarrow \quad i_L(t) = 12{,}5 \cdot \text{sen}\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Y las expresiones de la potencia instantánea entrante en la resistencia y en la bobina son:

$$p_R(t) = u_{AB}(t) \cdot i_R(t) = (200 \cdot \text{sen}\, 100t) \cdot (4{,}33 \cdot \text{sen}\, 100t) = 433 \cdot (1 - \cos 200t) \text{ W}$$

$$p_L(t) = u_{AB}(t) \cdot i_L(t) = (200 \cdot \text{sen}\, 100t) \cdot \left(12{,}5 \cdot \text{sen}\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2.500 \cdot \text{sen}\, 100t \cdot (-\cos 100t) = -1.250\, \text{sen}\, 200t \text{ W}$$

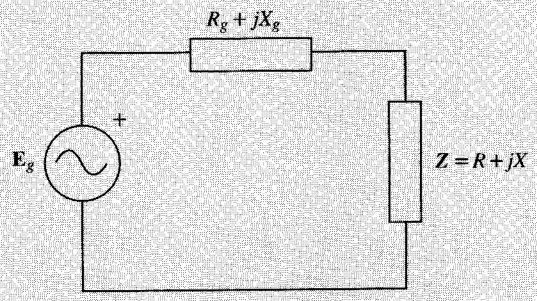
En el circuito de la figura se mantienen fijos los parámetros E_g, R_g y X_g. Determinar:

a) La expresión de la potencia activa P consumida por $\mathbf{Z}$.

b) Los valores de R y X para que la potencia sea máxima.

c) El rendimiento en tales condiciones.

Nota: el rendimiento es la relación entre la potencia P absorbida por $\mathbf{Z}$ y la cedida por la fuente ideal.



SOLUCIÓN

a) La potencia activa que consume la impedancia $\mathbf{Z}$ responde a la expresión $P = RI^2$. Hay que calcular, por tanto, la expresión de I en función de E_g, R_g y X_g:

$$I = \frac{E_g}{\sqrt{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{R \cdot E_g^2}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2}}$$

b) Para hallar los valores de R y X que hacen máxima la potencia hay que derivar la e
presión de esta respecto a las dos variables e igualar a cero:

$$\frac{\partial P}{\partial R}: \quad \frac{E_g^2[(R+R_g)^2+(X+X_g)^2] - RE_g^2 \cdot 2(R+R_g)}{[(R+R_g)^2+(X+X_g)^2]^2} = 0$$

$$[(R+R_g)^2+(X+X_g)^2] = 2R(R+R_g) \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X}: \quad \frac{-RE_g^2 \cdot 2(X+X_g)}{[(R+R_g)^2+(X+X_g)^2]^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R = 0 \\ X = -X_g \end{cases}$$

Hay dos soluciones posibles, pero si $R = 0$ la potencia activa consumida por la carga
nula, por lo que esta solución no es válida y la solución correcta es $X = -X_g$.

Entrando con este valor en la Ecuación (1) se encuentra el valor de R que hace máxima
potencia:

$$[(R+R_g)^2 + (-X_g+X_g)^2] = 2R(R+R_g)$$

$$(R+R_g) = 2R$$

$$R = R_g$$

Por tanto, la solución es: $\boxed{\begin{matrix} X = -X_g \\ R = R_g \end{matrix}}$

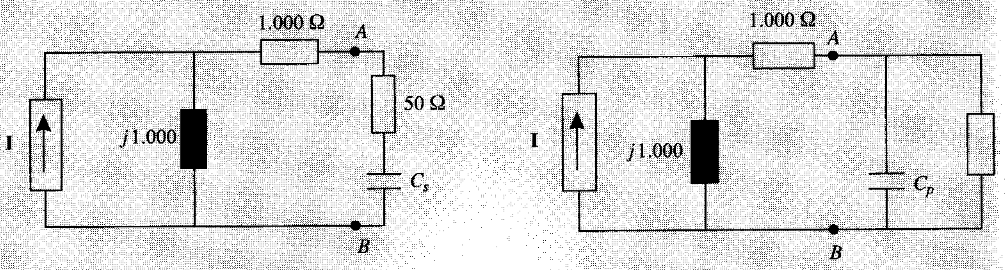
c) Para calcular el rendimiento es necesario calcular la potencia máxima consumida por
carga y la potencia cedida por la fuente, que coincidirá con la consumida por las dos im
dancias.

$$P_{\text{máx Z}} = \frac{E_g^2}{4R_g}$$

$$P_{\text{fuente}} = P_{\text{total cons.}} = (R_g + R)\frac{E_g^2}{(R+R_g)^2+(X+X_g)^2} = \frac{E_g^2}{2R_g}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{máx}}}{P_{\text{fuente}}} = \frac{\dfrac{E_g^2}{4R_g}}{\dfrac{E_g^2}{2R_g}} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

2.23. Calcular C_s y C_p para que la impedancia vista a la derecha de A y B en los circuitos de
figura, absorba la máxima potencia si $\mathbf{I} = 500\underline{/0^\circ}$ A. La frecuencia es $\omega = 2.000$ rad · s



Solución

La impedancia equivalente (Thévenin) del circuito pasivo correspondiente al representado a la izquierda de los terminales A y B de ambas figuras es:

$$\mathbf{Z}_0 = 1.000 + j1000 = R_0 + jX_0$$

Y por tanto su admitancia tiene el valor:

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{1}{\mathbf{Z}_0} = \frac{1}{1.000(1+j)} = \frac{1-j}{2.000} = G_0 + jB_0$$

En la figura de la izquierda, la impedancia colocada a la derecha de A y B es:

$$\mathbf{Z} = 50 - j\,\frac{1}{\omega C_s} = R + jX$$

Esta impedancia, tiene la R constante, y por tanto la máxima transferencia de potencia se dará cuando $X = -X_0$, es decir:

$$-\frac{1}{\omega C_s} = -1.000 \quad \Rightarrow \quad C_s = \frac{1}{1.000\omega} = \frac{1}{1.000 \cdot 2.000} = 0{,}5\ \mu\text{F}$$

De manera análoga, la admitancia colocada a la derecha de A y B de la figura de la derecha es:

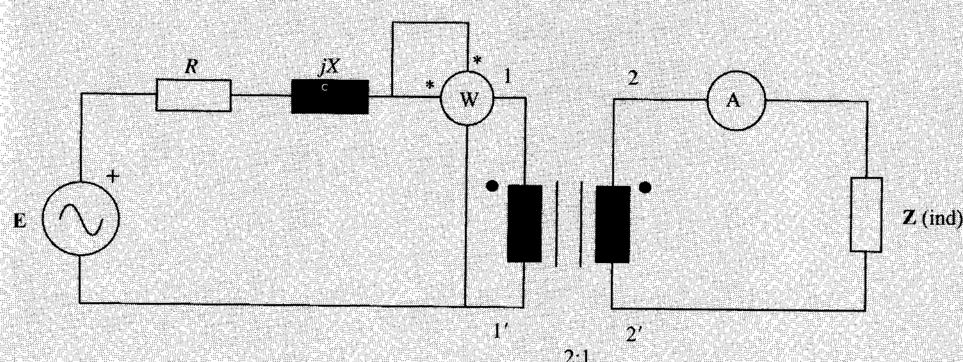
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{50} + j\omega C_p = G + jB$$

El valor de la conductancia G es constante y, por lo tanto, la máxima transferencia de potencia se dará cuando $B = -B_0$:

$$\omega C_p = -\frac{-1}{2.000} \quad \Rightarrow \quad C_p = \frac{1}{2.000\omega} = \frac{1}{2.000 \cdot 2.000} = 0{,}25\ \mu\text{F}$$

En el circuito de la figura, calcúlese el valor de la batería de condensadores que hay que conectar en paralelo con $\mathbf{Z}$ para que el conjunto tenga un $\cos\varphi = 0{,}9$ (capacitivo) si:

1. La batería se conecta entre 1 y 1′.
2. La batería se conecta entre 2 y 2′.



$E = 200$ V $\qquad A = 5$ A

$R = 1\ \Omega \qquad X = 2\ \Omega \qquad W = 100$ W

Solución

Como la relación de transformación del transformador ideal es 2, si la corriente en el secundario es 5 A, la corriente en el primario será $I_1 = 2{,}5$ A.

Se puede pasar la impedancia **Z** del secundario al primario del transformador, multiplicando por el cuadrado de la relación de transformación, es decir, la impedancia **Z** referida al primario será:

$$\mathbf{Z}' = 2^2\mathbf{Z} = 4\mathbf{Z} = R' + jX'$$

La potencia medida por el vatímetro es la que consume la parte resistiva de dicha impedancia:

$$P = R' \cdot I_1^2$$

luego

$$R' = \frac{P}{I_1^2} = \frac{100}{2{,}5^2} = 16\ \Omega$$

La asociación en serie de esta impedancia con la resistencia R y la bobina, da una impedancia equivalente:

$$\mathbf{Z}_{eq} = (R + R') + j(X + X') = (1 + 16) + j(2 + X') = 17 + j(2 + X')$$

El módulo de dicha impedancia es:

$$Z_{eq} = \sqrt{17^2 + (2 + X')^2}$$

Pero también:

$$Z_{eq} = \frac{E}{I_1} = \frac{200}{2{,}5} = 80\ \Omega$$

Igualando ambas expresiones se obtiene el valor de $X' = 76{,}17\ \Omega$.

Luego $\mathbf{Z}' = 16 + j76{,}17 = 77{,}83\underline{/78{,}14^\circ}\ \Omega$.

El valor eficaz de la tensión en la impedancia $\mathbf{Z}'$ es $U = Z' \cdot I_1 = 77{,}83 \cdot 2{,}5 = 194{,}6$ V

$$\varphi = 78{,}14^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{16}{77{,}83} = 0{,}21 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{76{,}17}{16} = 4{,}76$$

Para que $\cos\varphi' = 0{,}9$ (capacitivo) después de colocar una batería de condensadores en paralelo con $\mathbf{Z}'$, la $\operatorname{tg}\varphi' = -0{,}48$.

La reactiva que aporta la batería de condensadores es

$$\Delta Q_c = Q_c - Q_c' = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

$$\Delta Q_c = \omega C U^2$$

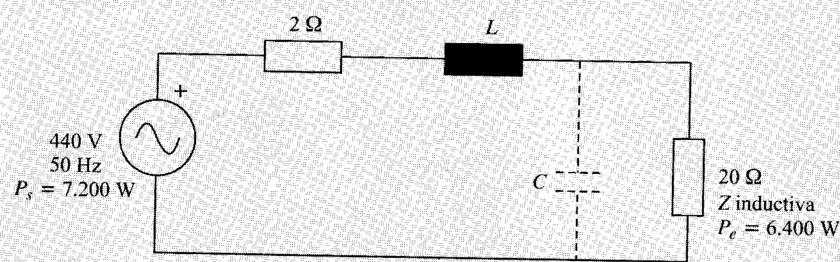
Luego:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2} = \frac{100(4{,}76 - (-0{,}48))}{100\pi \cdot 194{,}6^2} = 0{,}44\ \mu\text{F}$$

Si la batería la colocamos en el secundario del transformador, la tensión que soporta es $U_2 = U/2 = 97{,}3$ V. Como la tensión aparece en el denominador de la expresión anterior elevada al cuadrado y todos los demás valores se conservan, el valor del condensador que hay que colocar entre 2 y 2′ debe ser $C' = 4C = 1{,}76\ \mu$F.

Calcúlese en el circuito de la figura, tomando como origen de ángulos la tensión en la carga:

1. Intensidad absorbida por la carga.
2. Factor de potencia de la impedancia de carga.
3. Factor de potencia del generador.
4. Valor de la inductancia L.
5. Diagrama vectorial de tensión e intensidad.
6. Condensador que debería colocarse en paralelo con la carga para que el conjunto de ambas tuviese un $\cos\varphi = 0{,}9$ inductivo.



SOLUCIÓN

1. Pérdidas que se producen en la línea (diferencia entre potencia generada y consumida):

$$\Delta P = P_s - P_e = 7.200 - 6.400 = 800 \text{ W}$$

$$\Delta P = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad I^2 = 800/2 = 400 \quad \Rightarrow \quad I = 20 \text{ A}$$

2. La impedancia tendrá la forma $\mathbf{Z} = R + jX$ (impedancia inductiva):

$$P_e = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P_e}{I^2} = \frac{6.400}{400} = 16\ \Omega$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12\ \Omega$$

Por tanto:

$$\mathbf{Z} = 16 + j12 \qquad\qquad \cos\varphi = \frac{16}{20} = 0{,}8$$

De otra forma

$$\cos\varphi = \frac{P_e}{UI} = \frac{P_e}{ZI^2} = \frac{6.400}{20 \cdot 20^2} = 0{,}8$$

3. Potencia aparente producida por la fuente:

$$S_s = EI = 440 \cdot 20 = 8.800 \text{ VA}$$

$$\cos\varphi_s = \frac{P_s}{S_s} = \frac{7.200}{8.800} = 0{,}818$$

4. Potencias reactivas generada y consumida en la carga:

$$Q_s = \sqrt{S_s^2 - P_s^2} = \sqrt{8.800^2 - 7.200^2} = 5.059{,}6 \text{ VAr}$$

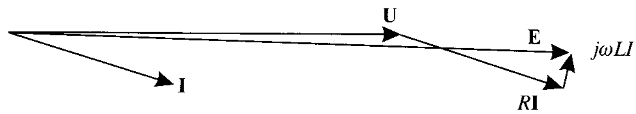
$$Q_e = I^2 \cdot X = 20^2 \cdot 12 = 4.800 \text{ VAr}$$

La diferencia se consume en la línea:

$$\Delta Q = Q_s - Q_e = 259{,}6 \text{ VAr}$$

$$\Delta Q = I^2 X_L \quad \Rightarrow \quad X_L = \frac{259{,}6}{20^2} = 0{,}649 \ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{0{,}649}{100\pi} = 2{,}06 \text{ mH}$$

5. El diagrama vectorial de tensiones e intensidades se muestra en la figura, siendo **U** tensión en la carga:



6. $\mathbf{U} = U\underline{/0°}$

Tensión en la carga:

$$U = Z \cdot I = 20 \cdot 20 = 400 \text{ V}$$

$$\Delta Q_c = Q_c - Q_c' = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

$$\Delta Q_c = \omega C U^2$$

$$C = \frac{P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega U^2} = \frac{6.400 \cdot (0{,}75 - 0{,}4843)}{100\pi 400^2} = 40 \ \mu\text{F}$$

2.26. Una fuente de tensión de corriente alterna, F, tiene dos terminales, A y B. La fuente e formada por la asociación en paralelo de un número N de fuentes de tensión reales cu características son $E_g = 120$ V, $R_g = 0{,}5 \ \Omega$, $X_g = 2 \ \Omega$, $f = 50$ Hz. Determínese:

1. La tensión entre los terminales A y B cuando F no suministra potencia aparente guna.
2. El valor máximo de N si se quiere que la corriente que circule entre los terminales A B en cortocircuito sea como mucho de 500 A.

Se conecta entre A y B un condensador de 10 μF en paralelo con una resistencia de 10 Calcúlese las potencias activa y reactiva absorbidas por la carga, así como el módulo de tensión entre A y B para el valor de N obtenido en el apartado anterior.

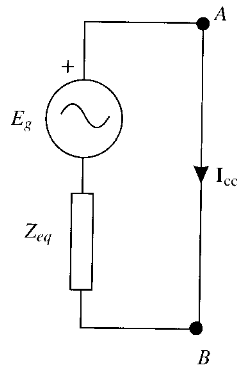
SOLUCIÓN

1. Cuando la fuente no suministra potencia alguna la corriente es nula y, por tanto, la te sión entre sus terminales es el valor de su tensión interna, $U_{AB} = E_g = 120$ V.

2. La impedancia equivalente de la fuente es:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{R_g}{N} + j\frac{X_g}{N}$$

Si se toma como origen de fases la tensión interna de la fuente, $\mathbf{E}_g$, se tiene que cuando se produce un cortocircuito entre A y B, $U_{AB} = 0$ V.



$$I_{cc,\,\text{máx}} \geqslant \frac{E_g}{Z_{eq}} = \frac{E_g}{\sqrt{\left(\frac{R_g}{N}\right)^2 + \left(\frac{X_g}{N}\right)^2}} = \frac{N \cdot E_g}{\sqrt{R_g^2 + X_g^2}}$$

$$N \leqslant \frac{I_{cc,\,\text{máx}}\sqrt{R_g^2 + X_g^2}}{E_g} = \frac{500\sqrt{0{,}5^2 + 2^2}}{120} = 8{,}59$$

Es decir, N debe ser el entero más próximo por debajo del valor 8,59, luego $N = 8$.

3. Se conecta entre A y B un condensador de 10 μF y una resistencia de 10 Ω. Esta asociación en paralelo tiene una admitancia equivalente $\mathbf{Y}_{RC}$:

$$\mathbf{Y}_{RC} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{10} + j100\pi \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 0{,}1 + j0{,}0031$$

La impedancia de dicha carga es $\mathbf{Z}_{RC}$:

$$\mathbf{Z}_{RC} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{RC}} = \frac{1}{0{,}1 + j0{,}0031} = 9{,}99 - j0{,}31$$

Y la corriente que circula por esta impedancia es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_{RC}} = \frac{120}{\left(\frac{0{,}5}{8} + j\,\frac{2}{8}\right) + (9{,}99 - j0{,}31)} = 11{,}94 + j0{,}07 = 11{,}94\underline{/0{,}34^{\circ}}\ \text{A}$$

La tensión en la carga (entre A y B) es, por tanto:

$$\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_{RC} = (11{,}94 + j0{,}07)(9{,}99 - j0{,}31) = 119{,}3 - j3 = 119.34\underline{/-1{,}44^{\circ}}\ \text{V}$$

La potencia aparente que consume la carga es:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_{AB} \cdot \mathbf{I}^* = (119{,}3 - j3)(11{,}94 - j0{,}07) = 1424{,}2 - j44{,}2\ \text{VA}$$

Luego:

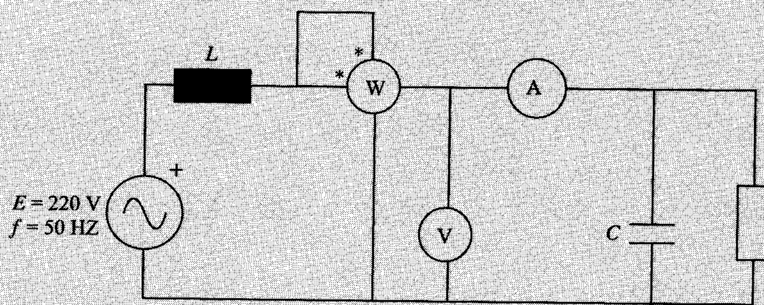
$$P = 1424{,}2\ \text{W} \qquad \text{y} \qquad Q = -44{,}2\ \text{Var}$$

2.27. En el circuito de la figura, las lecturas de los aparatos son:

Vatímetro: W = 1.100 W; Voltímetro: V = 275 V; Amperímetro: A = 5 A

a) Calcular los valores de R, L y C.

b) Dibujar el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.



Solución

a) Valor de R:

De la medida del vatímetro y del voltímetro se obtiene el valor de R:

$P = 1.100$ W $= U^2/R$, pero $U = 275$ V, por tanto, $R = U^2/P = 275^2/1100 = 68{,}75\ \Omega$

Valor de C:

Conocido el valor de la resistencia se puede hallar la intensidad que circula por dicha re-
tencia:

$$I_R = U/R = 257/68{,}75 = 4 \text{ A}$$

Esta intensidad forma un ángulo de 90° con la intensidad que circula por el condens
y el valor eficaz de la suma de ambas es la medida del amperímetro. Es decir:

$$I = 5 \text{ A} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \quad \Rightarrow \quad I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ A}$$

Conocida la corriente que circula por el condensador se puede calcular el valor de és

$$X_C = \frac{U}{I_C} = \frac{275}{3} = 91{,}67\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{100\pi \cdot 91{,}67} = 34{,}72\ \mu\text{F}$$

Otra forma de calcular el valor de C:

La admitancia equivalente del conjunto formado por la resistencia y el condensador en par
lo es:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

cuyo módulo vale:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

También se cumple que:

$$Y = \frac{I}{E} = \frac{5}{275} = 0{,}018 \text{ S}$$

Igualando ambas expresiones y sustituyendo el valor de $R = 68{,}75\ \Omega$, obtiene $\omega C = 0{,}0109$ S, de donde $C = \dfrac{0{,}0109}{100\pi} = 34{,}72\ \mu$F.

Valor de L:

La potencia aparente de la fuente es $S_g = E \cdot I = 220 \cdot 5 = 1.100$ VA.

Pero:

$$S_g^2 = P_g^2 + Q_g^2 \quad \Rightarrow \quad Q_g = \sqrt{S_g^2 - P_g^2}$$

Toda la potencia activa que cede la fuente es consumida por la resistencia, es decir, $P_g = 1.100$ W , luego $Q_g = 0$, o lo que es lo mismo, la potencia reactiva cedida por el condensador es igual a la que consume la bobina:

$$\left.\begin{aligned} Q_L &= X_L I^2 = \omega L I^2 \\ Q_C &= \frac{U^2}{X_C} = \frac{275^2}{91{,}67} = 824{,}97 \text{ VAr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad L = \frac{Q_C}{\omega I^2} = \frac{824{,}97}{100\pi \cdot 5^2} = 0{,}105 \text{ H}$$

b) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades:

Se elige como origen de ángulos la tensión de la fuente: $E = 220\underline{/0^\circ}$ V.

Por ser el circuito de carácter resistivo (el efecto de la bobina se compensa con el efecto del condensador), la intensidad debe estar en fase con la tensión de la fuente: $\mathbf{I} = 5\underline{/0^\circ}$ A.

La tensión en la bobina viene dada por la expresión:

$$\mathbf{U}_L = jX_L \cdot \mathbf{I} = j33 \cdot 5 = j165$$

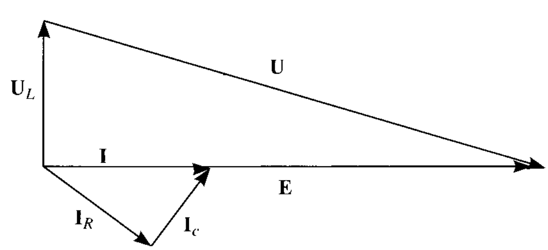
De la tensión del condensador y de la resistencia se conoce su módulo pero no su fase. Dicha tensión viene dada por la expresión:

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - \mathbf{U}_L = 220 - j165 = 275\underline{/36{,}87^\circ} \text{ V}$$

Queda por hallar la corriente en la resistencia y la corriente en el condensador:

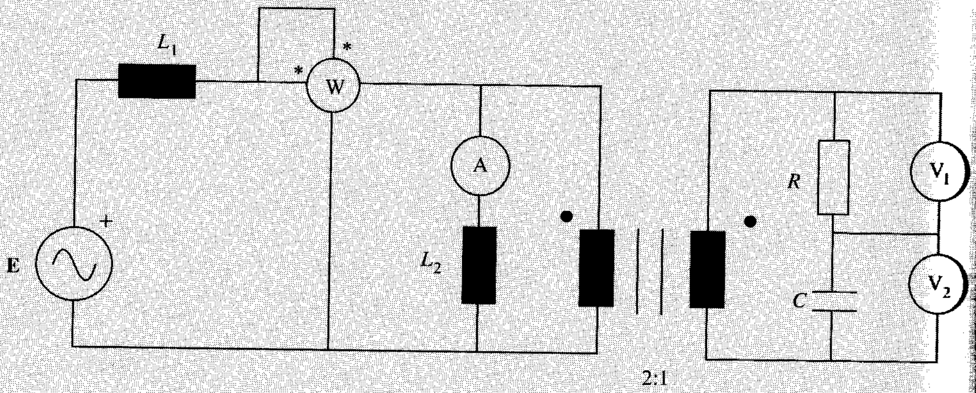
$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{U}}{R} = \frac{220 - j165}{68{,}75} = 3{,}2 - j2{,}5 = 4\underline{/-36{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = j\omega C\mathbf{U} = j0{,}0109(220 - j165) = 1{,}8 + j2{,}4 = 3\underline{/53{,}13^\circ} \text{ A}$$



2.28. En el circuito de la figura, las lecturas de los aparatos son:

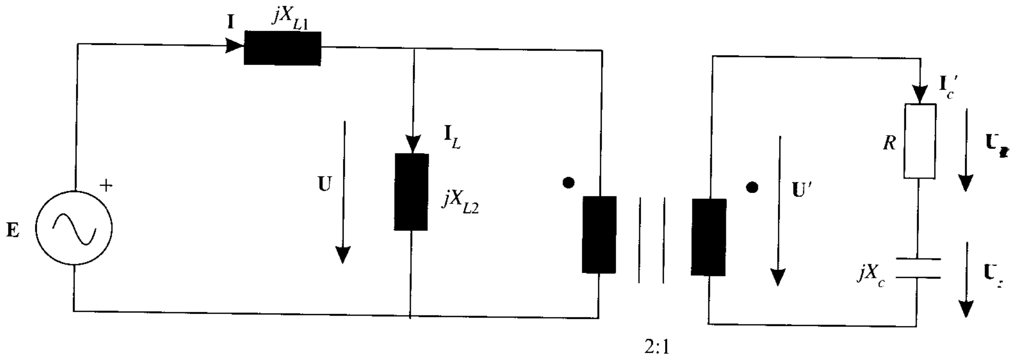
Amperímetro: 14 A; Voltímetro V_1: 40 V; Voltímetro V_2: 90 V; Vatímetro: 1.600 W.



Si la fuente de tensión E sólo suministra potencia activa, determínese su valor, así mo los de R, L_1, L_2 y C. La frecuencia de la fuente es de 50 Hz.

Solución

Circuito de alterna:



Puesto que la resistencia es el único consumidor de potencia activa:

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{40^2}{1.600} = 1\ \Omega$$

La corriente que circula por el condensador, será por tanto

$$I'_C = \frac{U_R}{R} = \frac{40}{1} = 40\ \text{A}$$

Y la impedancia del condensador:

$$X_C = \frac{U_C}{I'_C} = \frac{90}{40} = 9/4\ \Omega \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi 50 \cdot 9/4} = 1{,}41\ \text{mF}$$

Las tensiones en el secundario y en el primario del transformador ideal serán:

$$U' = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{90^2 + 40^2} = 98{,}5\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad U = 197\ \text{V}$$

A partir de aquí se obtiene el valor de L_2:

$$X_{L2} = \frac{U}{I_L} = \frac{197}{14} = 14{,}071\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{X_L}{\omega} = \frac{14{,}071}{100\pi} = 44{,}8\ \text{mH}$$

El valor de L_1 se hallará a partir de la potencia reactiva que consume:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + (-Q_C + Q_{L2})^2} = \sqrt{1.600^2 + \left(-\frac{9}{4}\cdot 40^2 + 14^2 \cdot 14{,}071\right)^2} = 1.808 \text{ VA}$$

Por tanto, la corriente suministrada por la fuente será:

$$I = \frac{1.808}{197} = 9{,}178 \text{ A}$$

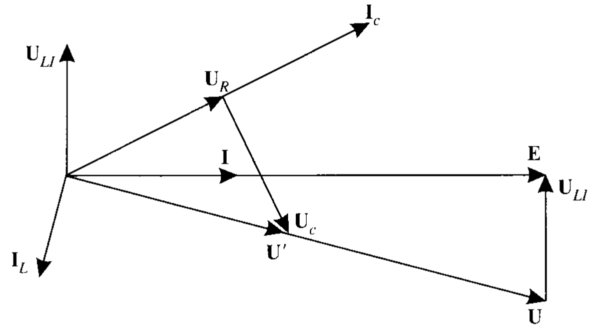
Balance de potencias reactivas:

$$I^2 \cdot X_{L1} + I_L^2 \cdot X_{L2} + X_C I_C'^2 = 0$$

Finalmente, el valor de la inductancia L_1 será:

$$X_{L1} = \frac{\frac{9}{4}\cdot 40^2 - 14{,}071 \cdot 14^2}{9{,}178^2} = 10\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{10}{100\pi} = 31{,}83 \text{ mH}$$

El diagrama vectorial de tensiones y corrientes se muestra en la figura:



A la vista del diagrama vectorial, el valor eficaz de **E** se puede calcular conociendo la tensión de la bobina L_1:

$$U_{L1} = X_{L1} \cdot I = 10 \cdot 9{,}178 = 91{,}78 \text{ V}$$

Y el valor eficaz de **E** es:

$$E = \sqrt{U^2 - U_{L1}^2} = \sqrt{197^2 - 91{,}78^2} = 174{,}31 \text{ V}$$

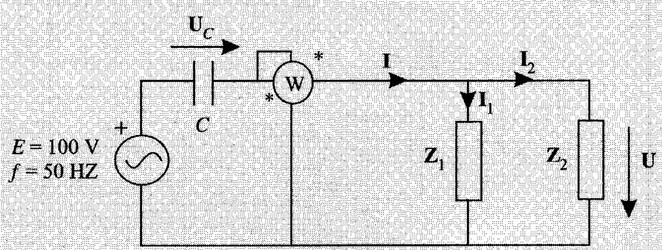
El circuito de la figura se encuentra en régimen estacionario sinuosidal. Determinar:

a) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

b) Valores de C, $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.

c) Balance de potencias.

Datos: $U_C = U = E = 100$ V; $I = \sqrt{3}\, I_1$; $I_1 = I_2$; la impedancia $\mathbf{Z}_1$ es de carácter inductivo, la $\mathbf{Z}_2$ es resistiva pura y el vatímetro ideal indica 1.500 W.

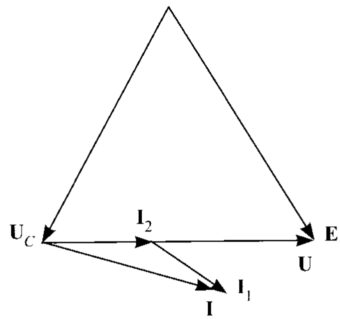


SOLUCIÓN

Diagrama vectorial

Las tensiones **U**, $\mathbf{U}_C$ y **E** cumplen la siguiente relación $\mathbf{E} = \mathbf{U}_C + \mathbf{U}$. Puesto que las tres siones tienen el mismo módulo, su diagrama vectorial será un triángulo equilátero. Esto nifica que el desfase entre ellas es de 60°. Como $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$, para que se satisfaga $I_1 = I_2$, $I = \sqrt{3}\, I_1$, la corriente **I** debe estar retrasada con respecto a $\mathbf{I}_2$ un ángulo de 30°.

Estas relaciones se muestran en el diagrama vectorial adjunto.



Por tanto, el valor de la corriente se puede obtener a partir de los datos y de las deduc nes realizadas a partir del diagrama vectorial:

$$P = EI\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{E\cos\varphi} = \frac{1.500}{100\cos 30^{\circ}} = 10\sqrt{3}\ \text{A}$$

Las otras corrientes serán:

$$I_1 = I_2 = I/\sqrt{3} = 10\ \text{A}$$

Por tanto, las impedancias valdrán:

$$Z_2 = R = U/I_2 = 100/10 = 10\ \Omega$$

$$Z_1 = U/I_1 = 100/10 = 10\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_1 = 10\underline{/60^{\circ}} = 5 + j5\sqrt{3}$$

$$\omega C = I/U_C = 10\sqrt{3}/100 = \sqrt{3}/10\ \text{S} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{3}/\pi\ \text{mF}$$

Balance de potencias

$$P_c = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1.000 + 500 = 1.500\ \text{W}$$

$$P_g = EI\cos\varphi = 100 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 1.500\ \text{W}$$

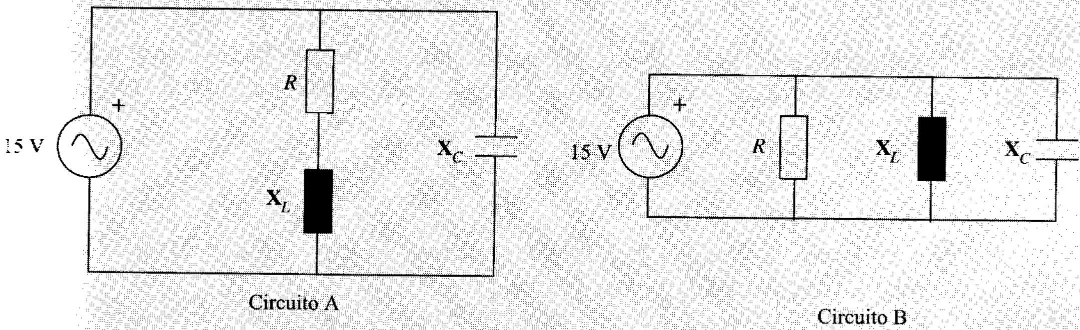
$$Q_c = I_1^2 X_1 - I^2 X_c = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} - (10\sqrt{3})^2 \cdot 10/\sqrt{3} = -500\sqrt{3}\ \text{VAr}$$

$$Q_g = EI\,\text{sen}\,\varphi = 100 \cdot 10\sqrt{3} \cdot (-1/2) = -500\sqrt{3}\ \text{VAr}$$

2.30. Se dispone de una fuente de tensión alterna ideal de valor eficaz 15 V y de tres elem pasivos ideales: resistencia R, bobina X_L (reactancia a la frecuencia de la fuente) y cond sador X_C (reactancia a la frecuencia de la fuente). Estos cuatro elementos se conectan e sí de dos maneras distintas, formándose los circuitos A y B.

En el circuito A, la fuente genera 36 W de potencia activa y 0 VAr de potencia reactiva, en tanto que en el circuito B la fuente genera 56,25 W de potencia activa. Calcular:

1. Valor de R.
2. Diagrama vectorial de tensiones e intensidades en el circuito A.
3. Valores de X_L y X_C.
4. Potencia reactiva cedida por la fuente en el circuito B.



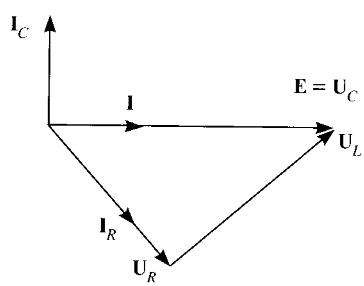
SOLUCIÓN

1. El valor de R se puede obtener del circuito B, pues la tensión que soporta la resistencia es la tensión de la fuente y se conoce la potencia activa que consume dicha resistencia (igual a la generada por la fuente):

$$P = 56{,}25 = \frac{15^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{15^2}{56{,}25} = 4\ \Omega$$

2. Diagrama vectorial de tensiones e intensidades en el circuito A:

Se toma como origen de fases la tensión de la fuente **E**, que coincide con la tensión en el condensador $\mathbf{U}_C$. La intensidad que circula por el condensador, $\mathbf{I}_C$, estará adelantada 90° respecto a dicha tensión. Por otra parte, como la potencia reactiva cedida por la fuente es nula, la corriente en la fuente **I** está en fase con la tensión **E**. Como **I** debe ser igual a la suma vectorial de $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_C$, se tiene $\mathbf{I}_R$. Por último, $\mathbf{U}_R$ estará en fase con $\mathbf{I}_R$ y $\mathbf{U}_L$ estará adelantada 90° con respecto a $\mathbf{I}_R$, cumpliéndose que la suma vectorial de $\mathbf{U}_R$ y $\mathbf{U}_L$ es igual a **E**.



3. Valores de X_C y X_L.

Conocido el valor de R, se tiene el valor de I_R, pues $P = I_R^2 \cdot R$:

$$I_R = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3\ \text{A}$$

y la tensión en la resistencia es $U_R = R \cdot I_R = 4 \cdot 3 = 12$ V.

Esta tensión forma un ángulo de 90° con la tensión en la bobina $\mathbf{U}_L$ y su suma vectori la tensión de la fuente, luego:

$$U_R^2 + U_L^2 = E^2 \quad \Rightarrow \quad U_L = \sqrt{E^2 - U_R^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ V}$$

Por tanto:

$$X_L = \frac{U_L}{I_R} = \frac{9}{3} = 3 \ \Omega$$

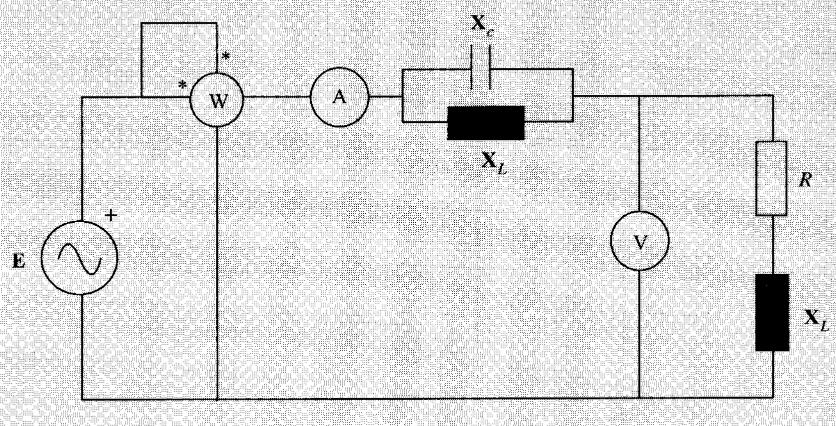
Para calcular X_C, tenemos en cuenta que la fuente no cede potencia reactiva, lueg reactiva consumida por la bobina se compensa con la cedida por el condensador. Es decir:

$$X_L \cdot I_R^2 = \frac{U_C^2}{X_C} \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{U_C^2}{X_L \cdot I_R^2} = \frac{15^2}{3 \cdot 3^2} = \frac{225}{27} = 8{,}33 \ \Omega$$

4. La potencia reactiva cedida por la fuente en el circuito B es igual a la que consu bobina menos la cedida por el condensador:

$$Q = Q_L - Q_C = \frac{E^2}{X_L} - \frac{E^2}{X_C} = \frac{15^2}{3} - \frac{15^2}{8{,}33} = 75 - 27 = 48 \text{ VAr}$$

2.31. En el circuito de la figura, determínense los valores de R, X_L y X_C, y representar el dia ma vectorial de tensiones e intensidades. Se conocen el valor eficaz de la fuente así c las lecturas de los aparatos. Las dos bobinas son iguales.



Datos:

$W = 10.000$ W $\qquad A = 50$ A $\qquad V = 250$ V $\qquad E = 250$ V

SOLUCIÓN

Valor de R. Puesto que la resistencia consume la potencia activa que mide el vatímetro:

$$P = RI^2 \quad \Rightarrow \quad R = P/I^2 = 10^4/50^2 = 4 \ \Omega$$

Valor de X_L. Sea $\mathbf{Z}_s$ la impedancia equivalente de la asociación serie de R y X_L:

$$Z_s = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad Z_s = \frac{250}{50} = 5 \ \Omega$$

De aquí se obtiene el valor de la reactancia inductiva.

$$Z_s = \sqrt{R^2 + X_L^2} \qquad X_L = \sqrt{Z_s^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ \Omega$$

Valor de X_c. Se obtiene a partir de la potencia reactiva consumida o generada por la asociación en paralelo de bobina y condensador (Q_p). La potencia reactiva generada por la fuente es:

$$Q_g = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(EI)^2 - P^2} = \sqrt{(250 \cdot 50)^2 - (10^4)^2} = \pm 7500 \text{ VAr}$$

Hay, en principio, dos soluciones posibles. Si $Q_g > 0$, es decir, si el circuito es inductivo, la potencia reactiva absorbida por la bobina y el condensador en paralelo será:

$$Q_p = Q_g - Q_s = 7.500 - 50^2 \cdot 3 = 0$$

Entonces, $X_c = -X_L = -3\ \Omega$ y $X_p = \dfrac{X_C \cdot X_L}{X_C + X_L} \rightarrow \infty$

Esta solución no es posible, puesto que en tal caso, no circularía corriente por el circuito. Otra solución $X_c = 0$, esto es, el condensador es un cortocircuito, que es una solución trivial.

Si por el contrario, se supone que $Q_g < 0$, es decir, que la fuente consume potencia reactiva, entonces, la asociación en serie de la bobina y el condensador genera potencia reactiva

$$Q_p = -7.500 - 50^2 \cdot 3 = -15.000 \text{ VAr}$$

Y en este caso, $Q_p = I^2 \cdot X_p = I^2 \dfrac{X_C \cdot X_L}{X_C + X_L}$

$$-15.000 = 50^2 \frac{X_C \cdot 3}{X_C + 3} \quad \Rightarrow \quad X_C = -2\ \Omega$$

Si se toma esta solución como la definitiva, la impedancia total del circuito será:

$$\mathbf{Z}_T = 4 + j(3 - 3 \cdot 2/(3 - 2)) = 4 - j3$$

Una vez obtenidos los parámetros, se obtienen todas las magnitudes del circuito.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{250}{4 - j3} = 10(4 + j3)$$

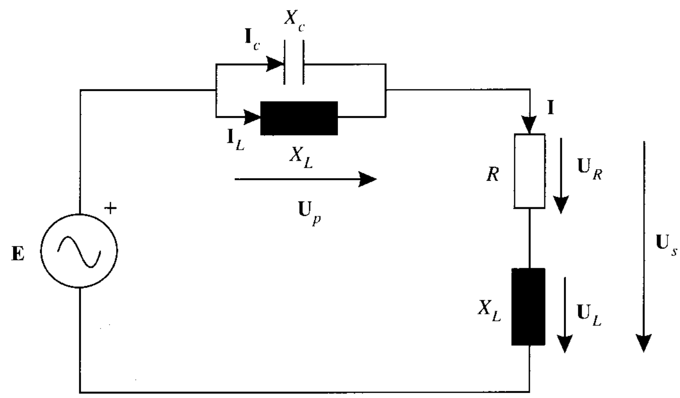
$$\mathbf{U}_s = \mathbf{Z}_s \cdot \mathbf{I} = (4 + j3) \cdot 10(4 + j3) = 10 \cdot (7 + j24)$$

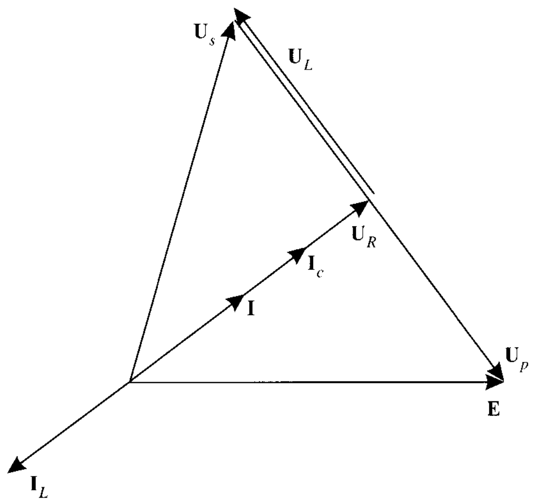
$$\mathbf{U}_p = \mathbf{E} - \mathbf{U}_s = 250 - 70 - j \cdot 240 = 60(3 - j4)$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}_p}{jX_C} = j \cdot \frac{60(3 - j4)}{2} = 30(4 + j3)$$

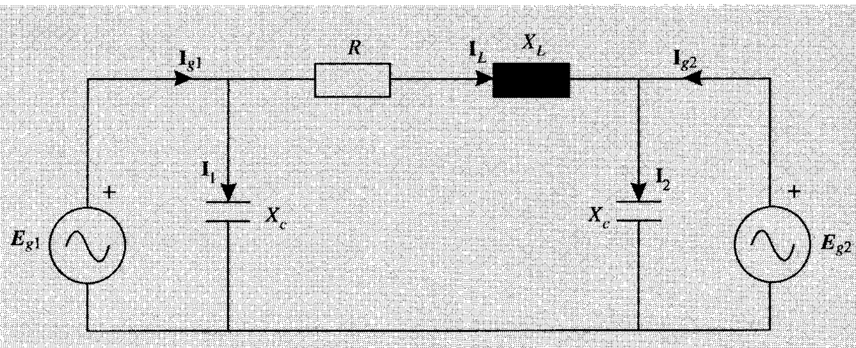
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{U}_p}{jX_L} = -j \cdot \frac{60(3 - j4)}{3} = -20(4 + j3)$$

Y el diagrama vectorial, finalmente, será el representado a continuación, junto con el circuito en el que se indica cada variable.





2.32.



$$\mathbf{E}_{g1} = 220\underline{/0^\circ} \qquad \mathbf{E}_{g2} = 220\underline{/-15^\circ} \qquad f = 50 \text{ Hz}$$

$$R = 1\ \Omega \qquad X_L = 3\ \Omega \qquad C = 100\ \mu\text{F}$$

En el circuito de la figura, con los valores y las referencias que se indican, obténgas

1. Corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_{g1}$, $\mathbf{I}_{g2}$, $\mathbf{I}_L$ en módulo y argumento.
2. Balance de potencias activas y reactivas consumidas y generadas en todos los e mentos.
3. El diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

SOLUCIÓN

1. El valor de la reactancia del condensador es:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31{,}83\ \Omega$$

Por tanto, la corriente que circula por los condensadores será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_{g1}}{-jX_C} = \frac{220}{-j31{,}83} = j6{,}91\ \text{A} = 6{,}91\underline{/90^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_{g2}}{-jX_C} = \frac{220\underline{/-15^\circ}}{-j31{,}83} = \frac{220\underline{/-15^\circ}}{31{,}83\underline{/-90^\circ}} = 6{,}91\underline{/75^\circ}\ \text{A} = 1{,}79 + j6{,}67\ \text{A}$$

La corriente que circula por la inductancia será:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{E}_{g1} - \mathbf{E}_{g2}}{R + jX_L} = \frac{220 - (212{,}50 - j56{,}94)}{1 + j3} = 17{,}83 + j3{,}44\ \text{A} = 18{,}16\underline{/10{,}92^\circ}\ \text{A}$$

Y las corrientes por los generadores,

$$\mathbf{I}_{g1} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_L = j6{,}91 + (17{,}83 + j3{,}44) = 17{,}83 + j10{,}35\ \text{A} = 20{,}62\underline{/30{,}1^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{g2} = \mathbf{I}_L - \mathbf{I}_2 = (17{,}83 + j3{,}44) - (1{,}79 + j6{,}67) = 16{,}04 - j3{,}23\ \text{A} = 16{,}36\underline{/-11{,}4^\circ}\ \text{A}$$

2. *Potencias generadas*

$$\mathbf{S}_{g1} = \mathbf{E}_{g1} \cdot \mathbf{I}_{g1}^* = 220(17{,}83 - j10{,}35) = 3.922{,}6 - j2277\ \text{VA}$$

$$\mathbf{S}_{g2} = \mathbf{E}_{g2} \cdot (-\mathbf{I}_{g2})^* = (212{,}50 - j56{,}94)(-16{,}04 - j3{,}23) = -3592{,}4 + j226{,}9\ \text{VA}$$

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{S}_{g1} + \mathbf{S}_{g2} = 330 - j\ 2.050\ \text{VA}$$

Potencia activa generada, $P_g = 330$ W
Potencia reactiva generada, $Q_g = -2050$ VAr

Potencias consumidas

Potencias activas:

$$P = R \cdot I_L^2 = 1 \cdot 18{,}16^2 = 330\ \text{W}$$

Potencias reactivas:

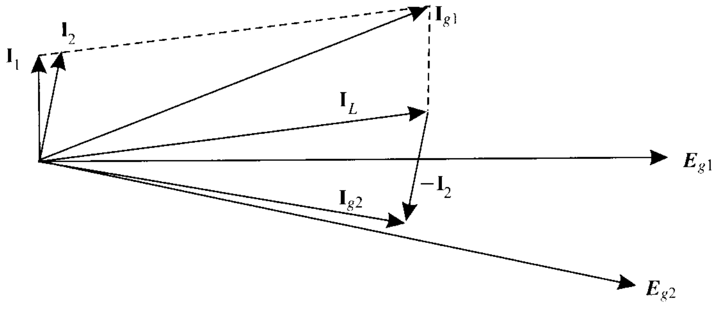
$$Q_L = X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot 18{,}16^2 = 990\ \text{VAr}$$

$$Q_{C1} = -X_C \cdot I_1^2 = -31{,}83 \cdot 6{,}91^2 = -1.520\ \text{VAr}$$

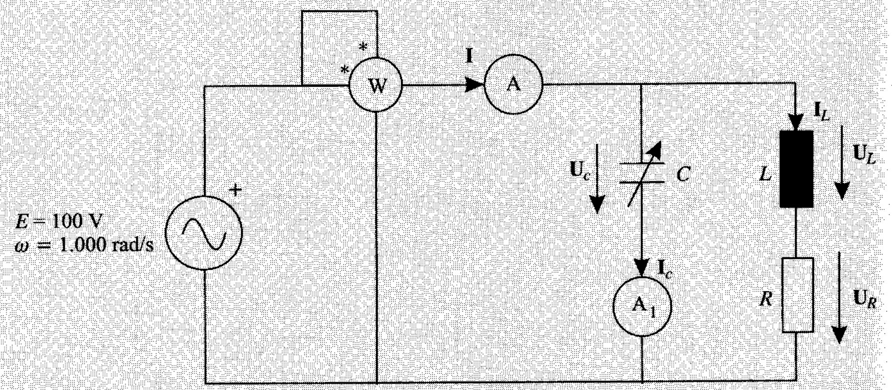
$$Q_{C2} = -X_C \cdot I_2^2 = -31{,}83 \cdot 6{,}91^2 = -1.520\ \text{VAr}$$

Potencia activa consumida, $P = 330$ W
Potencia reactiva consumida, $Q = 990 - 1.520 - 1.520 = -2.050$ VAr

3. Diagrama vectorial de tensiones e intensidades:

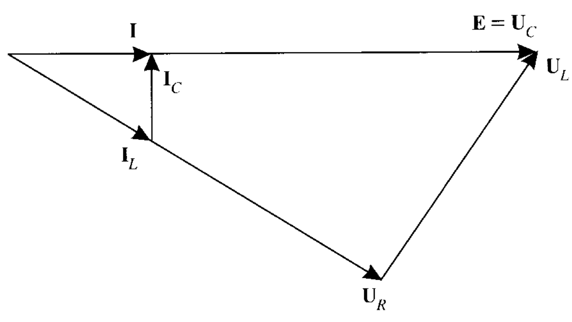


2.33. En el circuito de la figura, variando la capacidad del condensador se encuentra que c do la lectura del amperímetro A es mínima, es el doble de la lectura del amperímetro y la lectura del vatímetro es de 100 W. Hallar tensiones, corrientes y los valores de y C.



Solución

También la solución de este problema se realizará acudiendo al diagrama vectorial. En el mento en el que la lectura del amperímetro A es mínima, el condensador compensa com mente, la potencia reactiva consumida por la bobina. Por tanto, el circuito resultante de ciar R, L y C es puramente resistivo, y la tensión de la fuente (que coincide con la tensi el condensador) está en fase con la corriente **I**. En la figura siguiente se representa el grama vectorial.



La potencia entregada por la fuente será, en estas condiciones:

$$P = E \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{E} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A}$$

Por otra parte, la corriente que circula por el condensador estará adelantada 90° con respecto a la tensión entre sus terminales. Puesto que su módulo es, según el enunciado, de 0,5 A, el fasor será $\mathbf{I}_C = j0{,}5$.

Y la corriente que pasa por la bobina se obtiene como:

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I} - \mathbf{I}_C = 1 - j0{,}5$$

La tensión en el condensador es la de la fuente, $U_c = 100$. Una vez conocidas tensión y corriente en el condensador, la reactancia de éste será:

$$U_c = I_c \cdot X_c; \quad X_c = 100/0{,}5 = 200$$

Y por tanto, su capacidad:

$$X_c = 1/\omega C \quad \Rightarrow \quad C = 1/(1.000 \cdot 200) = 5 \ \mu\text{F}$$

El ángulo que forman las corrientes $\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}_L$ será el mismo que el que forman las tensiones $\mathbf{E}$ y $\mathbf{U}_R$. Este ángulo será:

$$\varphi = \text{arctg}\, 0{,}5$$

Y las tensiones aplicadas a la bobina y a la resistencia serán:

$$U_R = E \cdot \cos\varphi = 100 \cdot 0{,}8944 = 89{,}44 \text{ V}$$

$$U_L = E \cdot \text{sen}\,\varphi = 100 \cdot 0{,}4472 = 44{,}72 \text{ V}$$

A partir de estas magnitudes se obtienen los valores de R y de L,

$$R = \frac{U_R}{I_L} = \frac{89{,}44}{1{,}118} = 80 \ \Omega$$

$$X_L = \frac{U_L}{I_L} = \frac{44{,}72}{1{,}118} = 40 \ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = 40 \text{ mH}$$

El circuito de la figura está en régimen estacionario sinusoidal, con $\omega = 1.000$ rad/s. La lectura de los aparatos de medida son:

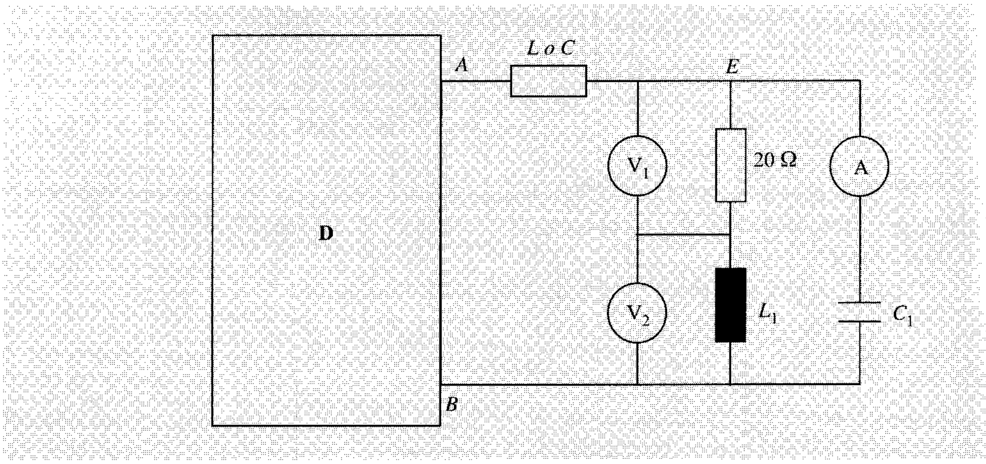
Voltímetro V_1: 240 V Voltímetro V_2: 180 V Amperímetro A: 7,5 A

Determinar:

a) El valor de la bobina L o el condensador C, sabiendo que la carga conectada a la derecha de AB tiene un $\cos\varphi = 1$.

b) Las potencias activa y reactiva consumidas a la derecha de EB.

c) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades del circuito.



SOLUCIÓN

a) El valor eficaz de la corriente que circula por la resistencia y la bobina L_1 es:

$$I_{RL} = U_1/R = 240/20 = 12 \text{ A}$$

Como la tensión que marca el voltímetro V_2 es $U_L = X_L I_{RL}$ se tiene el valor de X_L:

$$X_L = U_L/I_{RL} = 180/12 = 15\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = X_L/\omega = 15/1000 = 15 \text{ mH}$$

A partir de las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 se puede hallar el valor eficaz tensión U en el condensador C_1, puesto que ambas tensiones forman un ángulo de 90°:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{240^2 + 180^2} = 300 \text{ V}$$

Y la reactancia del condensador C_1 será:

$$X_{C1} = U/I_{C1} = 300/7{,}5 = 40\ \Omega \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1/\omega X_C = 1/(1.000 \cdot 40) = 25\ \mu\text{F}$$

Se halla la impedancia formada por R, L_1 y C_1:

$$\mathbf{Z}_{RL} = R + jX_L = 20 + j15 \ \Rightarrow \ \mathbf{Y}_{RL} = 1/\mathbf{Z}_{RL} = 1/(20 + j15) = (20 - j15)/625 = 0{,}032 - j0.0$$

$$\mathbf{Y}_{C1} = j\omega C_1 = j1.000 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = j0{,}025$$

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_{RL} + \mathbf{Y}_{C1} = 0{,}032 - j0{,}024 + j0{,}025 = 0{,}032 + j0{,}001$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Y}_{eq} = 1/(0{,}032 + j0{,}001) = (0{,}032 - j0{,}001)/0{,}001025 = 31{,}22 - j0{,}9756$$

Para que la carga conectada a la derecha de AB tenga un $\cos\varphi = 1$, la impedancia eq lente formada por la asociación en serie de L o C y $\mathbf{Z}_{eq}$ debe ser puramente resistiva, y p que $\mathbf{Z}_{eq}$ tiene carácter capacitivo, debe tratarse de una bobina cuya reactancia vale:

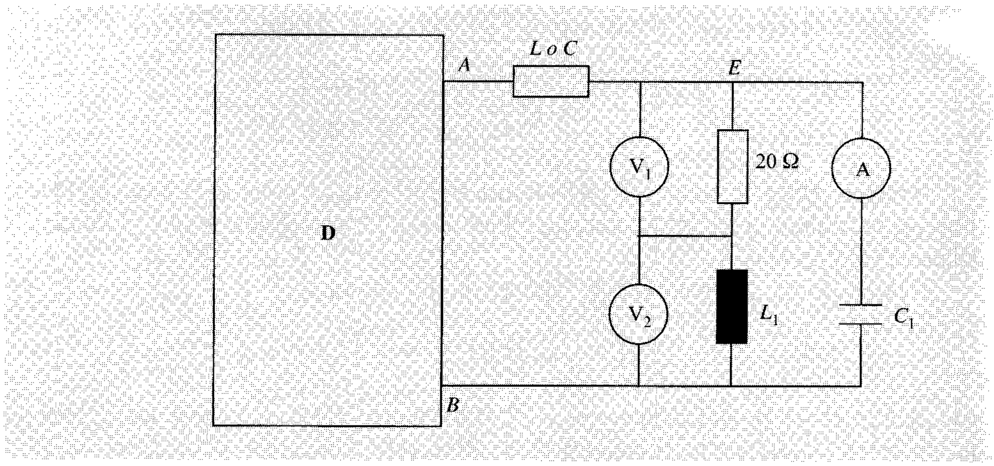
$$X = 0{,}9756\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = X_L/\omega = 0{,}9756/1.000 = 0{,}9756 \text{ mH}$$

b) Las potencias activa y reactiva consumidas por R, L_1 y C_1 son:

$$P_R = U_1^2/R = 240^2/20 = 2.880 \text{ W}$$

$$Q_R = 0 \text{ VAr}$$

$$P_{L1} = 0 \text{ W}$$



SOLUCIÓN

a) El valor eficaz de la corriente que circula por la resistencia y la bobina L_1 es:

$$I_{RL} = U_1/R = 240/20 = 12 \text{ A}$$

Como la tensión que marca el voltímetro V_2 es $U_L = X_L I_{RL}$ se tiene el valor de X_L:

$$X_L = U_L/I_{RL} = 180/12 = 15\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = X_L/\omega = 15/1000 = 15 \text{ mH}$$

A partir de las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 se puede hallar el valor eficaz d tensión U en el condensador C_1, puesto que ambas tensiones forman un ángulo de 90°:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{240^2 + 180^2} = 300 \text{ V}$$

Y la reactancia del condensador C_1 será:

$$X_{C1} = U/I_{C1} = 300/7{,}5 = 40\ \Omega \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1/\omega X_C = 1/(1.000 \cdot 40) = 25\ \mu\text{F}$$

Se halla la impedancia formada por R, L_1 y C_1:

$$\mathbf{Z}_{RL} = R + jX_L = 20 + j15 \ \Rightarrow \ \mathbf{Y}_{RL} = 1/\mathbf{Z}_{RL} = 1/(20 + j15) = (20 - j15)/625 = 0{,}032 - j0.0$$

$$\mathbf{Y}_{C1} = j\omega C_1 = j1.000 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = j0{,}025$$

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_{RL} + \mathbf{Y}_{C1} = 0{,}032 - j0{,}024 + j0{,}025 = 0{,}032 + j0{,}001$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Y}_{eq} = 1/(0{,}032 + j0{,}001) = (0{,}032 - j0{,}001)/0{,}001025 = 31{,}22 - j0{,}9756$$

Para que la carga conectada a la derecha de AB tenga un $\cos\varphi = 1$, la impedancia equ lente formada por la asociación en serie de L o C y $\mathbf{Z}_{eq}$ debe ser puramente resistiva, y pue que $\mathbf{Z}_{eq}$ tiene carácter capacitivo, debe tratarse de una bobina cuya reactancia vale:

$$X = 0{,}9756\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = X_L/\omega = 0{,}9756/1.000 = 0{,}9756 \text{ mH}$$

b) Las potencias activa y reactiva consumidas por R, L_1 y C_1 son:

$$P_R = U_1^2/R = 240^2/20 = 2.880 \text{ W}$$

$$Q_R = 0 \text{ VAr}$$

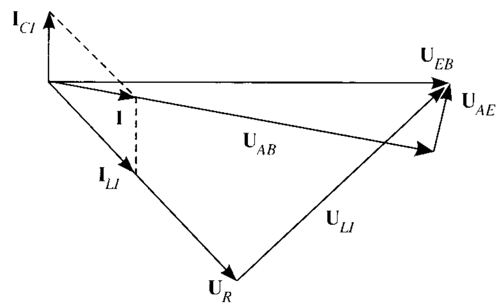
$$P_{L1} = 0 \text{ W}$$

$$Q_{L1} = U_2^2/X_{L1} = 180^2/15 = 2.160 \text{ VAr}$$

$$P_{C1} = 0 \text{ W}$$

$$Q_{C1} = -X_{C1} \cdot I_{C2} = -40 \cdot 7{,}5^2 = -2.250 \text{ VAr}$$

c) El diagrama vectorial de tensiones e intensidades, tomando como origen de fases la tensión entre E y B (tensión en el condensador), es el que se muestra en la figura.



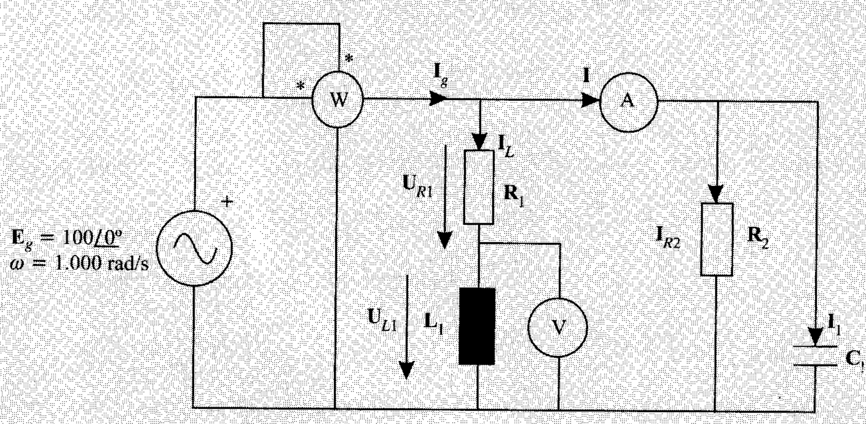
En el circuito de la figura, determinar:

a) Las lecturas de los aparatos ideales de medida.

b) El diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

c) Potencias activa y reactiva cedidas por la fuente

$R_1 = 16\ \Omega$ $\quad R_2 = 16\ \Omega$ $\quad L = 12$ mH $\quad C = 30\ \mu$F



SOLUCIÓN

a) El valor eficaz de la intensidad por la rama R_1-L_1 es:

$$I_L = \frac{E}{Z_{RL}} = \frac{E}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = 5 \text{ A}$$

Luego, la tensión en la bobina L_1, que coincide con la lectura del voltímetro, es:

$$U_{L1} = X_L \cdot I_L = 12 \cdot 5 = 60 \text{ V (Lectura del voltímetro)}$$

Las corrientes eficaces que circulan por el condensador y por la resistencia R_2 son:

$$I_1 = \frac{E_g}{X_C} = \frac{E_g}{1/\omega C} = \omega C E_g = 1.000 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 3 \text{ A}$$

$$I_{R_2} = \frac{E_g}{R_2} = \frac{100}{16} = 6{,}25 \text{ A}$$

Estas corrientes están desfasadas 90° por lo que el valor eficaz de la suma de amb decir, la medida del amperímetro es:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_{R_2}^2} = \sqrt{3^2 + 6{,}25^2} = 6{,}93 \text{ A (Lectura del amperímetro)}$$

La lectura del vatímetro es la potencia activa total consumida, es decir, la potencia c mida por las resistencias:

$$P = R_1 \cdot I_L^2 + R_2 \cdot I_{R_2}^2 = 16 \cdot 5^2 + 16 \cdot 6{,}25^2 = 1.025 \text{ W (Lectura del vatímetro)}$$

b) Para dibujar el diagrama vectorial se necesita conocer el ángulo de todas las tensio intensidades.

Se calcula la potencia reactiva de la bobina y del condensador:

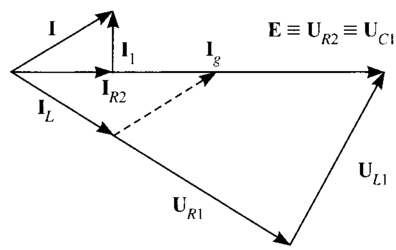
$$Q_L = X_L \cdot I_L^2 = 12 \cdot 5^2 = 300 \text{ VAr}$$

$$Q_{C1} = -X_{C1} \cdot I_1^2 = -\frac{I_1^2}{\omega C} = -\frac{3^2}{0{,}03} = -300 \text{ VAr}$$

La potencia reactiva cedida por la fuente es la suma de las consumidas por la carg tanto, $Q_g = 0$ VAr e $\mathbf{I}_g$ está en fase con $\mathbf{E}_g$. El valor eficaz de la corriente $\mathbf{I}_g$ es:

$$I_g = \frac{P}{E_g} = \frac{1.025}{100} = 10{,}25 \text{ A}$$

Ahora se puede dibujar el diagrama vectorial:



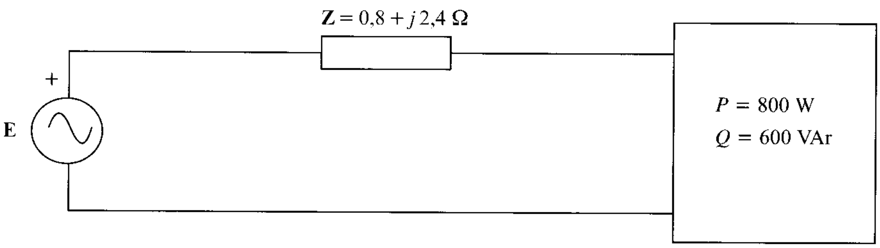
c) Las potencias activa y reactiva cedidas por la fuente son $P_g = 1.025$ W y $Q_g = 0$ V

2.36. Un sistema de distribución de energía eléctrica de corriente alterna monofásico está fo do por una fuente de tensión, una línea de transporte de impedancia $\mathbf{Z} = 0{,}8 + j \cdot 2{,}4$ una carga conectada en el otro extremo de la línea que absorbe 800 W de potencia a y 600 VAr de potencia reactiva. Si la potencia activa generada por la fuente es de 82 determinar:

a) Valor eficaz de la intensidad suministrada por el generador.
b) Potencia reactiva cedida por el generador.
c) Valor eficaz de las tensiones en la fuente y en la carga.

SOLUCIÓN

a) El sistema de distribución se puede representar por el siguiente esquema:



La diferencia entre la potencia activa generada por la fuente y la potencia activa consumida por la carga es la potencia consumida por la impedancia **Z**:

$$P_Z = P_g - P_c = 820 - 800 = 20 \text{ W}$$

Por otra parte, la potencia consumida por la impedancia **Z** se puede poner como:

$$P_Z = R \cdot I^2 = 0{,}8 \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{P_Z}{0{,}8}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}8}} = 5 \text{ A}$$

b) La potencia reactiva consumida por la línea es:

$$Q_Z = X \cdot I^2 = 2{,}4 \cdot 52 = 60 \text{ VAr}$$

Luego la potencia reactiva cedida por la fuente será la suma de las potencias consumidas por la carga y la línea:

$$Q_g = Q_c + Q_Z = 600 + 60 = 660 \text{ Var}$$

c) La potencia aparente consumida por la carga es:

$$S_c = \sqrt{P_c^2 + Q_c^2} = \sqrt{800^2 + 600^2} = 1.000 \text{ VA}$$

Como $S_c = U \cdot I$, tenemos que la tensión eficaz en la carga es:

$$U = \frac{S_c}{I} = \frac{1.000}{5} = 200 \text{ V}$$

Por otra parte, la potencia aparente del generador es:

$$S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = \sqrt{820^2 + 660^2} = 1.052{,}61 \text{ VA}$$

Y la tensión eficaz en la fuente:

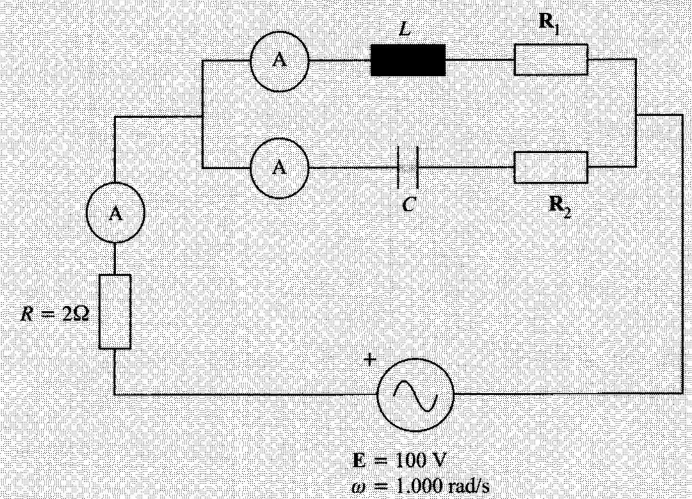
$$E = \frac{S_g}{I} = \frac{1.052{,}61}{5} = 210{,}52 \text{ V}$$

2.37. En el circuito de la figura, se sabe que el factor de potencia de la fuente es la unid
que las lecturas de los tres amperímetros son iguales y de 10 A. Determinar:

a) Valores de R_1, R_2, L y C.

b) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

c) Balance de potencias.



Solución

a) Si el factor de potencia de la fuente es la unidad, el circuito es puramente resistivo
intensidad está en fase con la tensión de la fuente.

$$\mathbf{E} = 100\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

$$\mathbf{I} = 10\underline{/0^\circ}\ \text{A}$$

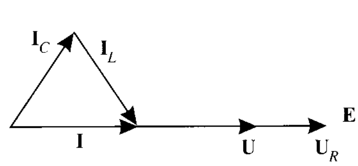
La tensión en la resistencia R es $\mathbf{U}_R = R \cdot \mathbf{I} = 2 \cdot 10\underline{/0^\circ} = 20\underline{/0^\circ}$ V, por lo que la te
U en las dos ramas en paralelo es:

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - \mathbf{U}_R = 100\underline{/0^\circ} - 20\underline{/0^\circ} = 80\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

Como las intensidades eficaces de las dos ramas en paralelo son iguales a 10 A, el m
lo de cada una de las impedancias de dichas ramas es:

$$Z_L = Z_C = \frac{U}{I} = \frac{80}{10} = 8\ \Omega$$

En el diagrama vectorial de intensidades, para que el valor eficaz de todas las intensid
sea 10 A, se debe cumplir que los vectores correspondientes formen un triángulo equilá
según indica la figura:



Por tanto, de la figura:

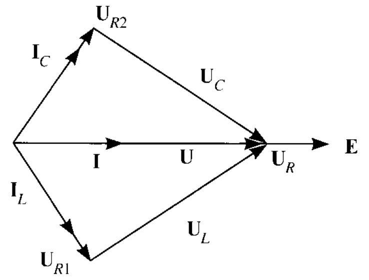
$$\mathbf{I}_C = 10\underline{/60^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_L = 10\underline{/-60^\circ}\ \text{A}$$

Las impedancias complejas de cada rama valen:

$$Z_C = \frac{U}{I_C} = \frac{80\underline{/0^\circ}}{10\underline{/60^\circ}} = 8\underline{/-60^\circ} = 4 - j4\sqrt{3} = R_2 - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \begin{cases} R_2 = 4\ \Omega \\ C = \dfrac{1}{4\sqrt{3}\omega} = \dfrac{1}{4.000\sqrt{3}} = 144\ \mu\text{F} \end{cases}$$

$$Z_L = \frac{U}{I_L} = \frac{80\underline{/0^\circ}}{10\underline{/-60^\circ}} = 8\underline{/60^\circ} = 4 + j4\sqrt{3} = R_1 + j\omega L \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 4\ \Omega \\ L = \dfrac{4\sqrt{3}}{\omega} = \dfrac{4\sqrt{3}}{1.000} = 4\sqrt{3}\ \text{mH} = 6{,}93\ \text{mH} \end{cases}$$

b) El diagrama vectorial completo de tensiones e intensidades es:



c) *Balance de potencias*

Potencias activas consumidas:

$$P_R = R \cdot I^2 = 2 \cdot 10^2 = 200\ \text{W}$$
$$P_{R1} = R_1 \cdot I_L^2 = 4 \cdot 10^2 = 400\ \text{W}$$
$$P_{R2} = R_2 \cdot I_C^2 = 4 \cdot 10^2 = 400\ \text{W}$$
$$P_T = P_R + P_{R1} + P_{R2} = 200 + 400 + 400 = 1.000\ \text{W}$$

Potencias reactivas consumidas:

$$Q_L = \omega L \cdot I_L^2 = 4 \cdot 10^2 = 400\ \text{VAr}$$
$$Q_C = -\omega L \cdot I_C^2 = -4 \cdot 10^2 = -400\ \text{Var}$$
$$Q_T = Q_L + Q_C = 400 - 400 = 0\ \text{VAr}$$

Potencia activa generada:

$$P_g = E \cdot I \cos\varphi = 100 \cdot 10 \cdot 1 = 1.000\ \text{W}$$

Potencia reactiva generada:

$$Q_g = E \cdot I \operatorname{sen}\varphi = 100 \cdot 10 \cdot 0 = 0\ \text{VAr}$$

2.38. En el circuito de la figura, las lecturas del vatímetro y del amperímetro son 1.000 W y 3 respectivamente. Si la fuente de tensión ideal no absorbe ni cede potencia reactiva, se p determinar:

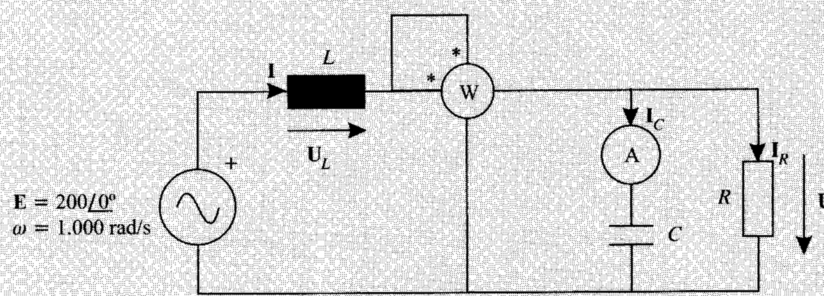
a) Intensidad suministrada por la fuente.

b) Diagrama vectorial de intensidades.

c) Valores de R, L y C.

d) Balance de potencias activa y reactiva.

e) Diagrama vectorial de tensiones



Solución

a) *Intensidad suministrada por la fuente*

Como la fuente de tensión no absorbe ni cede potencia reactiva, el factor de potencia de fuente es la unidad. Además la potencia activa cedida por la fuente coincide con la lectura vatímetro:

$$P = 1.000 \text{ W} = E \cdot I \cos\varphi$$

Luego:

$$I = \frac{P}{E\cos\varphi} = \frac{1.000}{200 \cdot 1} = 5 \text{ A}$$

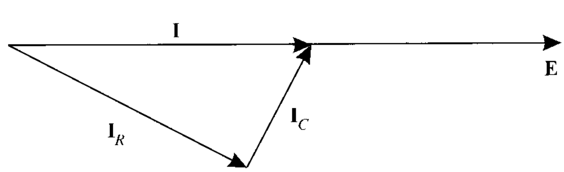
Tomando como origen de ángulos la tensión de la fuente, se tiene:

$$\mathbf{E} = 200\underline{/0^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{I} = 5\underline{/0^\circ} \text{ A}$$

b) *Diagrama vectorial de intensidades*

Las intensidades $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_R$ forman un ángulo de 90°, y su suma vectorial debe ser igual a intensidad $\mathbf{I}$:



c) Para calcular los valores de R, L y C se determina en primer lugar el valor eficaz de intensidad que circula por la resistencia:

$$I_R = \sqrt{I^2 - I_C^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ A}$$

Como la potencia que medida por el vatímetro es la potencia consumida por la resistencia, se tiene que

$$P = 1.000 \text{ W} = R \cdot I_R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P}{I_R^2} = \frac{1.000}{4^2} = 62{,}5\ \Omega$$

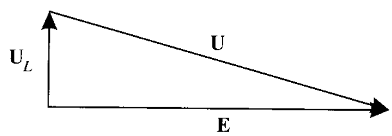
El valor eficaz de la tensión **U** en la resistencia y en el condensador es:

$$U = R \cdot I_R = 62{,}5 \cdot 4 = 250 \text{ V}$$

Como

$$U = X_C \cdot I_C = \frac{I_C}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{3}{1.000 \cdot 250} = 12\ \mu\text{F}$$

Por último, para hallar el valor de L, se calcula el valor eficaz de la tensión en la bobina. Dicha tensión está adelantada 90° respecto de la intensidad. Luego el diagrama vectorial de tensiones debe ser:



Y se cumple:

$$U_L = \sqrt{U^2 - E^2} = \sqrt{250^2 - 200^2} = 150 \text{ V} = X_L \cdot I = \omega L \cdot I \Rightarrow L = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{150}{1.000 \cdot 5} = 30 \text{ mH}$$

d) *Balance de potencias activa y reactiva*

Potencia activa consumida:

$$P_R = R \cdot I_R^2 = 62{,}5 \cdot 4^2 = 1.000 \text{ W}$$

Potencias reactivas consumidas:

$$Q_L = \omega L \cdot I^2 = 1.000 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 5^2 = 750 \text{ VAr}$$

$$Q_C = -\omega C \cdot U^2 = -1.000 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 250^2 = -750 \text{ VAr}$$

$$Q_T = Q_L + Q_C = 0$$

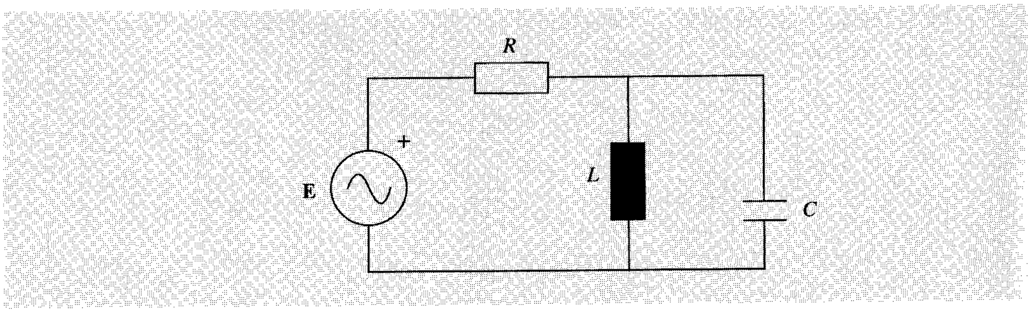
Potencia activa generada:

$$P = E \cdot I \cos\varphi = 200 \cdot 5 \cdot 1 = 1.000 \text{ W}$$

Potencia reactiva generada:

$$Q = E \cdot I \operatorname{sen}\varphi = 0$$

9. En el circuito de la figura, la fuente de tensión ideal tiene un valor eficaz $E = 50$ V, y suministra una potencia de 40 W. La inductancia de la bobina es de 15 mH, y la corriente que pasa por ella tiene el doble de valor eficaz que la que circula por el condensador. Calcular el valor de R y de C si la frecuencia es de 1.000 rad/s.

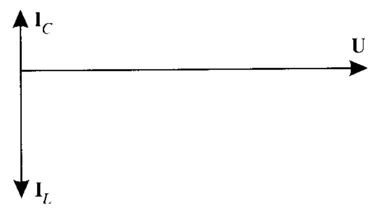


SOLUCIÓN

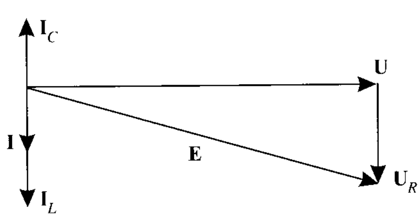
Llamando **U** a la tensión en la bobina y el condensador, la condición $I_L = 2I_C$ se puede po
como:

$$\frac{U}{X_L} = 2\,\frac{U}{X_C} \Rightarrow X_C = 2X_L = 2 \cdot \omega L = 2 \cdot 1.000 \cdot 0{,}015 = 30\ \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{1.000 \cdot 30} = 33{,}33$$

El diagrama vectorial de tensiones e intensidades en el condensador y en la bobina, mando como origen de fases la tensión, es:



Si **I** es la corriente por la resistencia, se debe cumplir que $\mathbf{I} = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$, luego **I** estará fase con $\mathbf{I}_L$ y su valor eficaz será igual al de $\mathbf{I}_C$. Completando el diagrama anterior co corriente y tensión en la resistencia y en la fuente se tiene:



Luego, se debe cumplir que $U^2 + U_R^2 = E^2$. Esta relación se puede poner en función de intensidades del condensador y de la resistencia, que son iguales en valor eficaz:

$$(X_C I)^2 + (RI)^2 = E^2$$

$$(30I)^2 + (RI)^2 = 50^2 \qquad (1)$$

Es decir, se tiene una ecuación para dos incógnitas I y R. Pero, la potencia que suministra fuente es la misma que consume la resistencia, luego $P = RI^2$, es decir, $I^2 = \frac{P}{R} = \frac{40}{R}$ (2).

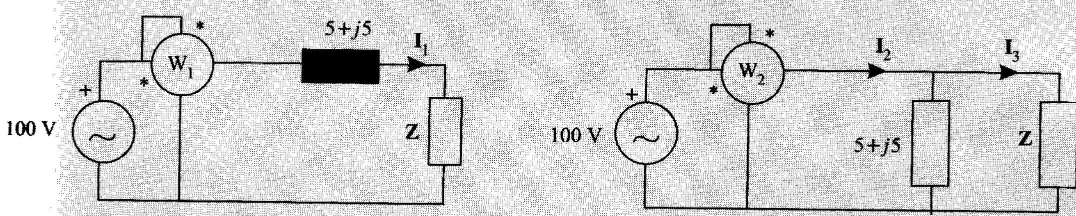
Sustituyendo (2) en (1):

$$50^2 = 40R + 900\,\frac{40}{R} \quad\Rightarrow\quad 40R^2 - 2.500R + 36.000 = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} R = 40\ \Omega;\ I = 1\ \text{A} \\ R = 22{,}5\ \Omega;\ I = 1{,}33\ \text{A} \end{cases}$$

Y existen dos soluciones posibles.

En los circuitos de la figura la impedancia **Z** es la misma. Las lecturas de los vatímetros son: $W_1 = 1.000$ W y $W_2 = 2.000$ W. Calcular:

1. La impedancia $\mathbf{Z} = R \pm jX$.
2. Las corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ y las potencias absorbidas por **Z** en ambos casos.
3. Dibujar los diagramas vectoriales de tensiones e intensidades en ambos casos.



SOLUCIÓN

1. De la primera figura se tiene que la impedancia equivalente a la asociación en serie entre las dos impedancias es $\mathbf{Z}_{eq} = (5 + R) + j(5 \pm X)$.

La potencia medida por el vatímetro es la consumida por la parte resistiva de esta impedancia:

$$P = \frac{U^2}{R_{eq}} \quad\Rightarrow\quad R_{eq} = \frac{100^2}{1.000} = 10\ \Omega$$

$$R_{eq} = 5 + R \quad\Rightarrow\quad R = R_{eq} - 5 = 10 - 5 = 5\ \Omega$$

Por otra parte

$$P = R_{eq} \cdot I_1^2 \quad\Rightarrow\quad I_1 = \sqrt{\frac{P}{R_{eq}}} = \sqrt{\frac{1.000}{10}} = 10\ \text{A}$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} = \frac{U}{I_1} \quad\Rightarrow\quad 10^2 + X_{eq}^2 = 10^2 \quad\Leftrightarrow\quad X_{eq} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad X = 5\ \Omega \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Z} = 5 - j5$$

2. Tomando como origen de fases en ambos circuitos la tensión en la fuente, se tiene que:

$$\mathbf{I}_1 = 10\underline{/0^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{100}{5 - j5} = \frac{100(5 + j5)}{(5 - j5)(5 + j5)} = \frac{100(5 + j5)}{50} = 10 + j10\ \text{A} = 10\sqrt{2}\underline{/45^\circ}\ \text{A}$$

En el segundo circuito la impedancia equivalente a la asociación paralelo es:

$$\mathbf{Z}_{eq,p} = \frac{(5 + j5)(5 - j5)}{(5 + j5) + (5 - j5)} = \frac{5^2 - (j5)^2}{10} = 5\ \Omega$$

Luego:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{Z}_{eq,p}} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

En el primer circuito, la tensión en la impedancia **Z** es:

$$\mathbf{U}_Z = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{Z} = 10 \cdot (5 - j5) = 50 - j50$$

y la potencia absorbida por la impedancia **Z** en este caso es:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{U}_Z \cdot \mathbf{I}_1^* = (50 - j50) \cdot 10 = 500 - j500$$

es decir, $P = 500$ W y $Q = -500$ VAr.

La potencia absorbida por **Z** en el segundo circuito es:

$$\mathbf{S}_2 = 100 \cdot \mathbf{I}_3^* = 100 \cdot (10 - j10) = 1.000 - j1000$$

es decir, $P = 1.000$ W y $Q = -1.000$ VAr.

3. Se dibujan los diagramas vectoriales en ambos casos:

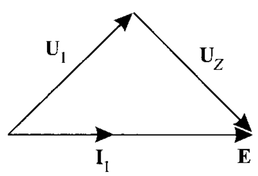
Circuito 1:

$\mathbf{E} = 100\angle 0^\circ$ V

$\mathbf{I}_1 = 10\angle 0^\circ$ A

$\mathbf{U}_1 = 10(5 + 5j) = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ$ V

$\mathbf{U}_Z = 50\sqrt{2}\angle -45^\circ$ V



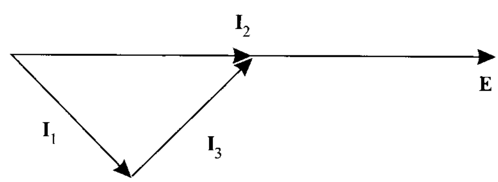
Circuito 2:

$\mathbf{E} = 100\angle 0^\circ$ V

$\mathbf{I}_2 = 20\angle 0^\circ$ A

$\mathbf{I}_3 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$ A

$\mathbf{I}_1 = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ$ A



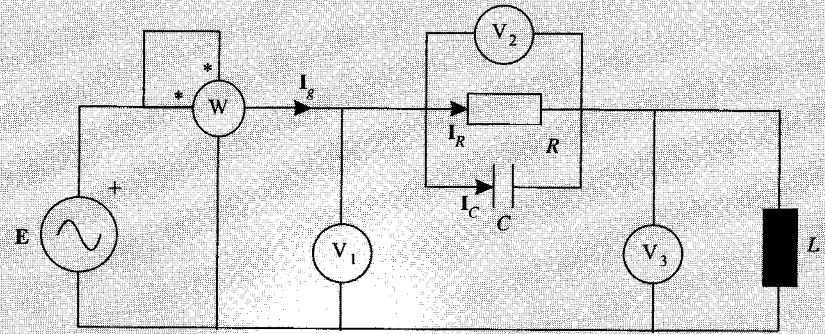
2.41. El circuito de la figura se encuentra en régimen estacionario sinusoidal. Determinar:

a) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades.

b) Valores de R, L y C.

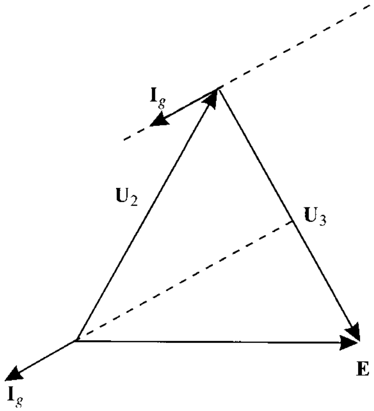
c) Expresiones instantáneas de las magnitudes $i_g(t)$, $i_R(t)$ e $i_C(t)$.

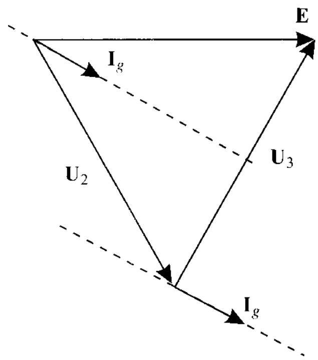
Datos: las lecturas de los aparatos de medida son $V_1 = V_2 = V_3 = 100$ V y $W = 100$
Frecuencia de la fuente $f = 50$ Hz.



SOLUCIÓN

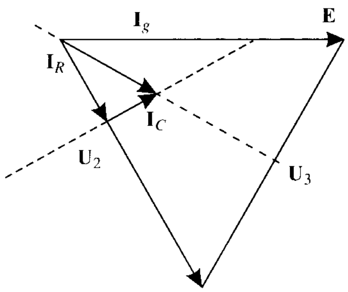
a) Como las lecturas de los tres voltímetros son iguales y además se debe cumplir que $\mathbf{E} = \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3$, las tres tensiones deben formar un triángulo equilátero. Si se toma como origen de fases la tensión de la fuente $\mathbf{E}$, existen dos posibilidades:





La corriente $\mathbf{I}_g$ es la que circula por la bobina, luego dicha corriente debe estar retrasada 90° con respecto a la tensión $\mathbf{U}_3$. En la primera figura esto es imposible, pues en tal caso la tensión de la fuente y su corriente formarían un ángulo mayor de 90°. Por tanto, se elige la segunda opción.

Por otra parte, la corriente en la resistencia, $\mathbf{I}_R$, estará en fase con la tensión $\mathbf{U}_2$ y la corriente en el condensador, $\mathbf{I}_C$, estará adelantada 90° respecto a esta misma tensión, cumpliéndose además que la suma de ambas corrientes sea la corriente de la fuente. Luego el diagrama vectorial de tensiones e intensidades es:



b) La lectura del vatímetro es la potencia que consume la resistencia, el valor de R viene dado por:

$$R = \frac{U_2^2}{P} = \frac{100^2}{100} = 100\ \Omega$$

A la vista de la figura, la corriente de la fuente está retrasada un ángulo de 30° con respecto a su tensión. La potencia activa que cede la fuente viene dada, entonces, por la expresión: $P = E \cdot I_g \cdot \cos 30°$ de donde se halla I_g:

$$I_g = \frac{P}{E \cos 30°} = \frac{100}{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}15\ \text{A}$$

Y la potencia reactiva cedida por la fuente:

$$Q = E \cdot I_g \cdot \text{sen}\, 30^\circ = 100 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ VAr}$$

La corriente que atraviesa la bobina es I_g, y su tensión U_3 luego la reactancia de la bobina es:

$$X_L = \frac{U_3}{I_g} = \frac{100}{2/\sqrt{3}} = 50\sqrt{3} = 86{,}6025\ \Omega$$

Pero $X_L = \omega L$, luego $L = \dfrac{X_L}{\omega} = \dfrac{50\sqrt{3}}{2\pi 50} = 0{,}2757$ H.

La potencia reactiva que consume la bobina es:

$$Q_L = I_g^2 \cdot X_L = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 50\sqrt{3} = \frac{200}{\sqrt{3}} \text{ VAr}$$

Haciendo el balance de potencias reactivas, se debe cumplir que la potencia reactiva cedida por la fuente sea igual a la consumida por la carga. Pero la potencia consumida por la carga es la que consume la bobina menos la cedida por el condensador, luego:

$$Q_C = Q_L - Q = \frac{200}{\sqrt{3}} - \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ VAr}$$

Como $Q_C = \omega C U_2^2$, se tiene que:

$$C = \frac{Q_C}{\omega U_2^2} = \frac{100/\sqrt{3}}{2\pi 50 \cdot 100^2} = 1{,}84 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 0{,}184\ \mu\text{F}$$

Para hallar los valores instantáneos de las corrientes, se calculan primero los valores eficaces. El valor eficaz de la corriente $\mathbf{I}_R$ es:

$$I_R = \frac{U_2}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

Y el valor eficaz de $\mathbf{I}_C$:

$$I_C = \omega C U_2 = 100\pi \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 0{,}58 \text{ A}$$

El valor instantáneo de la tensión en la fuente es:

$$e(t) = 100\sqrt{2} \cos 100\pi t \text{ V}$$

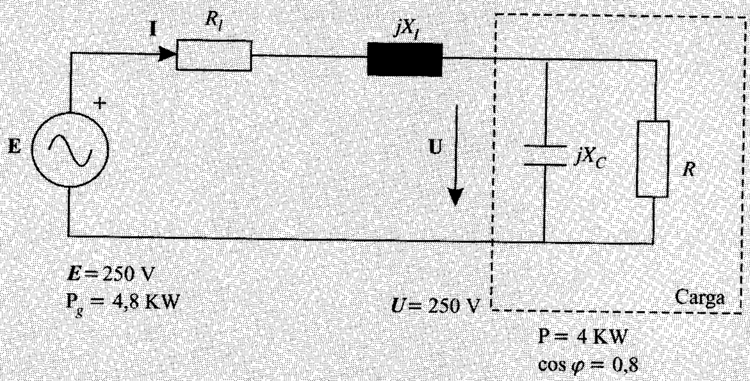
Luego:

$$i_R(t) = 100\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$$

$$i_C(t) = 0{,}58\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$$

$$i_g(t) = 1{,}15\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$$

12 En el circuito de la figura, la carga formada por la asociación en paralelo de una resistencia y un condensador consume una potencia de 4 kW con un factor de potencia 0,8. Los valores eficaces de la tensión de la fuente y en la carga son 250 V en ambos casos, y la fuente suministra una potencia de 4,8 kW, y absorbe potencia reactiva.



Calcúlese:

a) El valor de la corriente **I**, en módulo y argumento.

b) Los valores de R y X_c.

c) Los valores de R_l y X_l, y el factor de potencia de la fuente.

d) Dibújese el diagrama vectorial

Nota: tomar como origen de fases la tensión **U**.

SOLUCIÓN

a) Conocidos la potencia activa que consume la carga y su factor de potencia, es posible calcular el valor eficaz de la corriente y su argumento:

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{4.000}{250 \cdot 0{,}8} = 20 \text{ A}$$

$$\varphi = \arccos 0{,}8 = 36{,}87^\circ$$

Luego $\mathbf{I} = 20\underline{/36{,}87^\circ}$ A.

b) La potencia activa que consume la carga es la que consume la resistencia, por tanto:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{250^2}{4.000} = 15{,}625\ \Omega$$

Y la intensidad que consume la resistencia es $I_R = \dfrac{U}{R} = \dfrac{250}{15{,}625} = 16$ A, en fase con **U**:

$$\mathbf{I}_R = 16\underline{/0^\circ} \text{ A}$$

La intensidad que circula por el condensador estará adelantada 90° con respecto a la tensión y por tanto, con respecto a $\mathbf{I}_R$. Como $\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$, se tiene que:

$$I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = 12\underline{/90^\circ} \text{ A}$$

Luego la reactancia del condensador es:

$$X_c = \frac{U}{I_C} = \frac{250}{12} = 20{,}83\ \Omega$$

c) La potencia activa que consume la resistencia R_l es:

$$P_{Rl} = P_g - P = 4.800 - 4.000 = 800\ \text{W}$$

$$P_{Rl} = R_l \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad R_l = \frac{P_{Rl}}{I^2} = \frac{800}{20^2} = 2\ \Omega$$

$P_g = E \cdot I \cdot \cos\varphi_g$ y el factor de potencia de la fuente es:

$$\cos\varphi_g = \frac{P_g}{E \cdot I} = \frac{4.800}{250 \cdot 20} = 0{,}96$$

Como la fuente absorbe potencia reactiva, el carácter del circuito es capacitivo y la sión en la fuente retrasa a la intensidad un ángulo $\varphi_g = \arccos(0{,}96) = 16{,}26°$.

La potencia reactiva que absorbe la fuente es:

$$Q_g = E \cdot I \cdot \text{sen}\,\varphi_g = 250 \cdot 20 \cdot 0{,}28 = 1.400\ \text{VAr}$$

Esta potencia es igual a la que cede el condensador menos la que absorbe la bobina. Com potencia cedida por el condensador es $Q_C = X_C \cdot I_C^2 = 20{,}83 \cdot 12^2 = 3.000$ VAr, se tiene qu potencia que absorbe la bobina debe ser:

$$Q_L = Q_C - Q_g = 3.000 - 1.400 = 1.600\ \text{VAr} = X_l \cdot I^2$$

Por tanto:

$$X_l = \frac{Q_L}{I^2} = \frac{1.600}{20^2} = 4\ \Omega$$

d) Para dibujar el diagrama vectorial se escriben todas las magnitudes en forma fasorial:

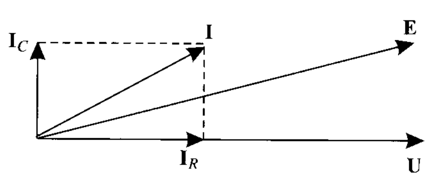
$$\mathbf{U} = 250\underline{/0°}\ \text{V}$$

$$\mathbf{I} = 20\underline{/36{,}87°}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_R = 16\underline{/0°}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_C = 12\underline{/90°}\ \text{A}$$

$$\mathbf{E} = 250\underline{/36{,}87° - 16{,}26°} = 250\underline{/20{,}61°}\ \text{V}$$



2.43. El circuito activo de la figura (CA) está formado por fuentes sinusoidales de 50 Hz, bob nas y condensadores todos ellos ideales. A partir de los datos asociados a las figuras:

1. Obtener el equivalente Thévenin del circuito activo, visto desde los terminales *A* y *B*.

2. Determinar el valor de *C*.

Nota: los aparatos de medida son ideales.

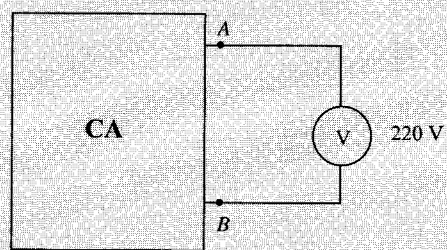


Figura 1

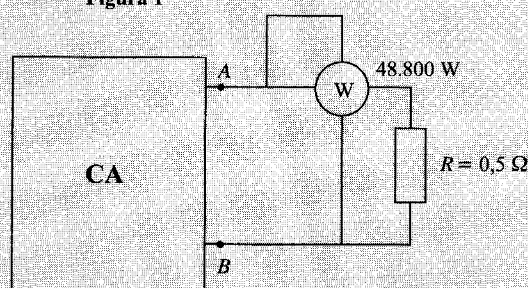


Figura 2

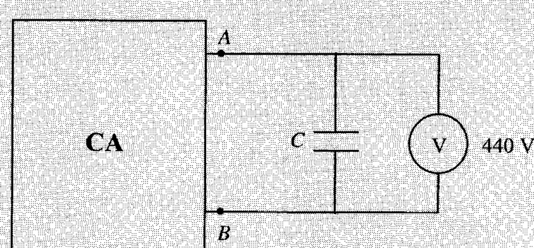


Figura 3

SOLUCIÓN

1. De la Figura 1 se obtiene la tensión a circuito abierto, que es precisamente la tensión de la fuente del equivalente Thévenin buscado:

$$U_o = E_{th} = 220 \text{ V}$$

Se toma el valor de la fuente como origen de ángulos. Es decir $\mathbf{E}_{th} = 220\underline{/0^\circ}$ V.

La lectura del vatímetro en la Figura 2, da la potencia que consume la resistencia $R = 0{,}5$ Ω: $P = 48.400$ W.

Como $P = RI^2$, se puede obtener el valor eficaz de la corriente que circula por la resistencia R:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{48.400}{0{,}5}} = \sqrt{96.800} = 311{,}13 \text{ A}$$

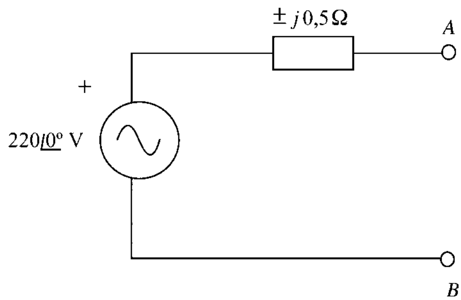
Por otra parte, la impedancia Thévenin del circuito equivalente será $Z_{th} = jX_{th}$, pues el está formado por bobinas y condensadores, y el valor eficaz de la intensidad se puede p como:

$$I = \frac{E_{th}}{\sqrt{X_{th}^2 + R^2}}$$

Donde se obtiene el valor de X_{th}:

$$X_{th} = \sqrt{\frac{E_{th}^2}{I^2} - R^2} = \sqrt{\frac{220^2}{96.800} - 0{,}5^2} = \pm 0{,}5\ \Omega$$

Luego el equivalente Thévenin del CA es:



2. En el circuito de la Figura 3 la impedancia formada por la asociación serie de la i dancia Thévenin y el condensador es $\mathbf{Z} = \pm jX_{th} - jX_C$.

Se distinguen dos casos, según la impedancia Thévenin sea inductiva o capacitiva:

Supóngase que $\mathbf{Z}_{th} = j0{,}5$ (inductiva). En tal caso, $Z = 0{,}5 - X_C$ y la tensión en el densador es:

$$U = 440 = \frac{220}{0{,}5 - X_C} X_C \quad \Rightarrow \quad X_C = 1/3\ \Omega \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{3}{100\pi} = 9{,}55\ \mathrm{mF}$$

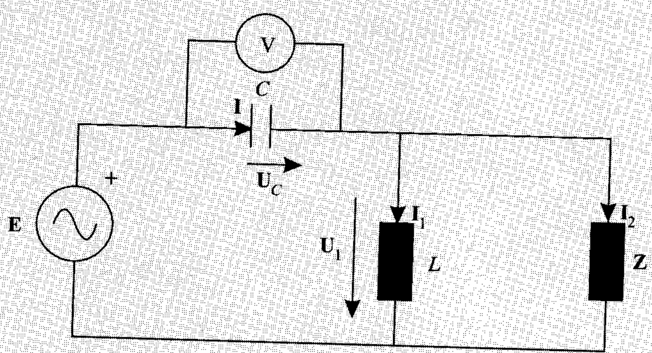
Si $\mathbf{Z}_{th} = -j0{,}5$ (capacitiva) entonces $Z = 0{,}5 + X_C$ y la tensión en el condensador es:

$$U = 440 = \frac{220}{0{,}5 + X_C} X_C \quad \Rightarrow \quad X_C = -1\ \Omega \text{ (absurdo)}$$

Por tanto el CA tiene carácter inductivo con $\mathbf{Z}_{th} = j0{,}5\ \Omega$ y el valor del condens 9,55 mF.

PROBLEMAS PROPUESTOS

El circuito de la figura está en régimen estacionario sinusoidal. **Z** es una impedancia de factor de potencia 0,95 inductivo. Las magnitudes que señalan los aparatos de medida son 100 V y 1 A. La relación entre los módulos de los términos E y U_1 es de $E = \dfrac{\sqrt{3}}{2} U_1$.



Si la fuente de tensión no genera ni consume potencia reactiva, calcúlese tomando como origen de fases la tensión $\mathbf{U}_1$:

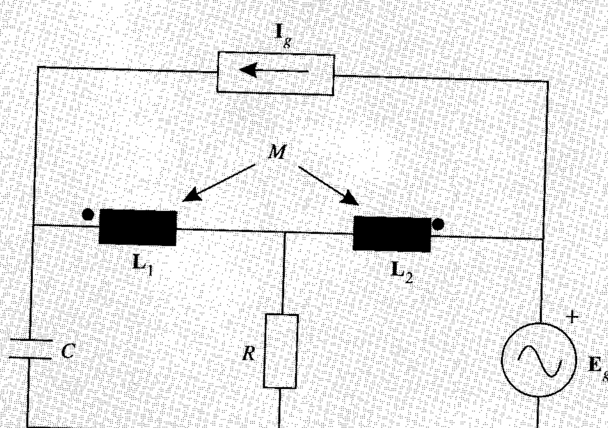
1. Valor, en módulo y argumento, de las tensiones $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_C$ y **E**.
2. Valor, en módulo y argumento, de las corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e **I**.
3. Valores de **Z**, L y C.

Nota: los aparatos de medida son ideales. Frecuencia: 50 Hz

SOLUCIÓN

1. $\mathbf{U}_1 = 200\underline{/0^\circ}$; $\mathbf{E} = 100\sqrt{3}\underline{/30^\circ}$; $\mathbf{U}_c = 100\underline{/-120^\circ}$
2. $\mathbf{I} = 1{,}9/\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}$; $\mathbf{I}_1 = 0{,}238\underline{/-90^\circ}$; $\mathbf{I}_2 = 1\underline{/-18{,}19^\circ}$
3. $\mathbf{Z} = 200\underline{/18{,}19^\circ}$; $C = 34{,}92$ mF; $L = 2{,}67$ H

Exprésense las ecuaciones resultantes del análisis por mallas del circuito de la figura.



Nota: las fuentes son sinusoidales de pulsación ω rad/s.

Solución

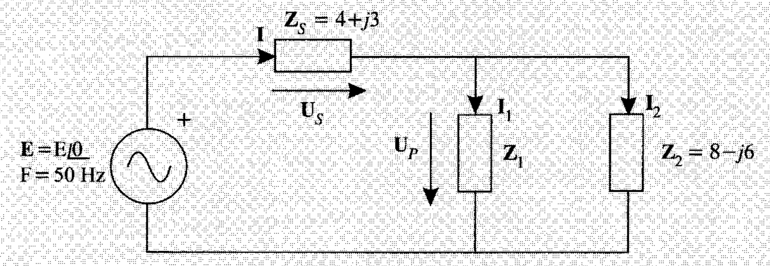
$$\left(R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1\right)\mathbf{I}_\mathrm{I} - (R + j\omega M)\mathbf{I}_\mathrm{II} = -j\omega(L_1 - M)\mathbf{I}_g$$

$$-(R + j\omega M)\mathbf{I}_I + (R + j\omega L_2)\mathbf{I}_\mathrm{II} = \mathbf{E}_g - j\omega(L_2 - M)\mathbf{I}_g$$

$$-j\omega(L_1 - M)\mathbf{I}_\mathrm{I} - j\omega(L_2 - M)\mathbf{I}_\mathrm{II} - \mathbf{U}_x = j\omega(L_1 - 2M)\mathbf{I}_g$$

donde $\mathbf{U}_x$ es la tensión entre los extremos de la fuente de corriente, de derecha a izquierd la figura.

2.3. En el circuito de la figura, se sabe que los valores eficaces de las tensiones $\mathbf{U}_S$ y $\mathbf{U}_P$ iguales, que el valor eficaz de la corriente $\mathbf{I}_1$ es de 4 A, y que la fuente no sumin potencia reactiva.



Se pide:

1. Calcular el valor de $\mathbf{Z}_1$.

2. Determinar, en módulo y argumento, los valores de las tensiones y corrientes del tema.

3. Obtener las potencias activas y reactivas consumidas por cada impedancia, y las g radas por la fuente.

Solución

1. $\mathbf{Z}_1 = 8 - j6$

2. $\mathbf{I} = 8\underline{/0^\circ}$; $\mathbf{E} = 64\underline{/0^\circ}$; $\mathbf{U}_p = 40\underline{/-36{,}87^\circ}$; $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = 4\underline{/0^\circ}$

3. $P_1 = 128$ W; $Q_1 = -96$ VAr; $P_2 = 128$ W; $Q_2 = -96$ VAr; $P_s = 256$ W; $Q_s = 192$ VAr; $P_g = 512$ W

2.4. Una carga está conectada en paralelo con una fuente de 20 kV de tensión eficaz, y sume 300 kW con un factor de potencia de 0,65 inductivo. Si se conecta un conden en paralelo con la carga, el factor de potencia pasa a valer 0,9 inductivo. Se pide:

1. Potencia reactiva que suministra el condensador.

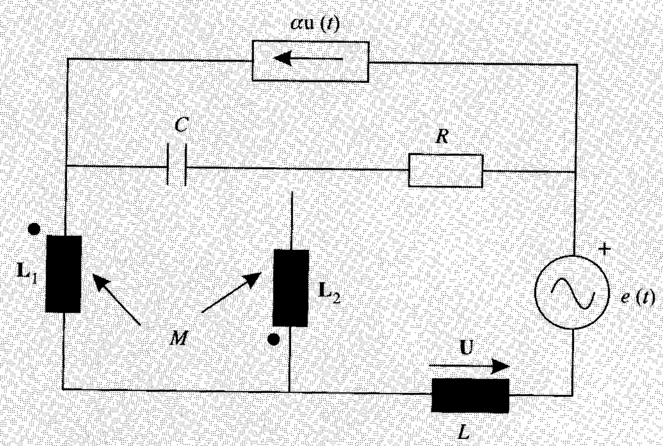
2. Variación de potencia aparente suministrada por la fuente al conectar el condens

3. Capacidad del condensador.

SOLUCIÓN

1. $Q_c = 205{,}4$ kVAr
2. $\Delta S = -128{,}21$ kVA
3. $C = 1{,}6\ \mu$F

2.5. El circuito de la figura está en régimen estacionario sinusoidal, y las fuentes son de pulsación ω rad/s. Escríbanse las ecuaciones correspondientes al análisis por mallas.



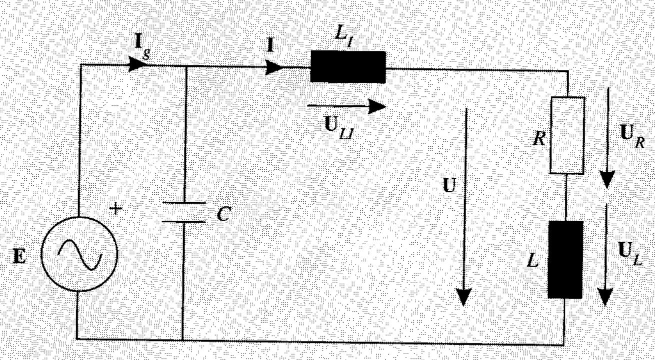
Nota: en el término independiente del sistema de ecuaciones resultante, no deberá aparecer ninguna magnitud dependiente de las incógnitas.

SOLUCIÓN

$$[j\omega(L_1 + L_2 + 2M) - j/\omega C]\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + [\alpha L/C - j\omega(L_2 + M)]\mathbf{I}_{\mathrm{II}} = 0$$

$$-j\omega(L_2 + M)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + [R + j\omega(L + L_2 + \alpha RL)]\mathbf{I}_{\mathrm{II}} = -\mathbf{E}$$

2.6. En el circuito de la figura:



$$R = 4\ \Omega;\ L = 10\ \text{mH};\ C = 0{,}64\ \text{mF};\ L_1 = 1\ \text{mH};\ e(t) = 230\sqrt{2}\cos 314{,}16t$$

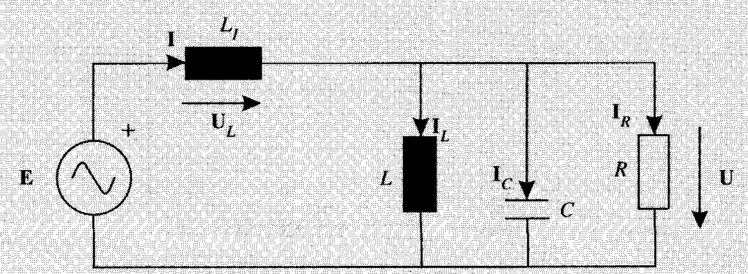
Obténgase:

1. Valores de $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{U}_{L1}$, $\mathbf{I}_g$, en módulo y argumento. Indíquese la expresión temporal de $u_{L1}(t)$.
2. Balance de potencias.

Solución

1. $\mathbf{I} = 43{,}51\underline{/-40{,}82^{\circ}}$; $\mathbf{I}_C = 46{,}24\underline{/90^{\circ}}$; $\mathbf{U} = 221{,}30\underline{/-2{,}68^{\circ}}$; $\mathbf{U}_R = 174{,}04\underline{/-40{,}82^{\circ}}$;
   $\mathbf{U}_L = 136{,}69\underline{/49{,}18^{\circ}}$; $\mathbf{U}_{L1} = 13{,}67\underline{/49{,}18^{\circ}}$; $\mathbf{I}_g = 37{,}43\underline{/28{,}40^{\circ}}$
   $u_{L1}(t) = 13{,}67\sqrt{2}\cos(314{,}16t + 0{,}86)$
2. $P_g = 7572{,}8$ W; $Q_g = -4093{,}8$ VAr. $P_R = 7572{,}8$ W; $Q_C = -10.636$ VAr;
   $Q_{L1} = 594{,}76$ VAr; $Q_L = 5947{,}64$ VAr

2.7. En el circuito de la figura:



$R = 11\ \Omega$; $L = 45$ mH; $C = 0{,}22$ mF; $L_1 = 3{,}18$ mH; $u(t) = 220\sqrt{2}\cos 314{,}16$

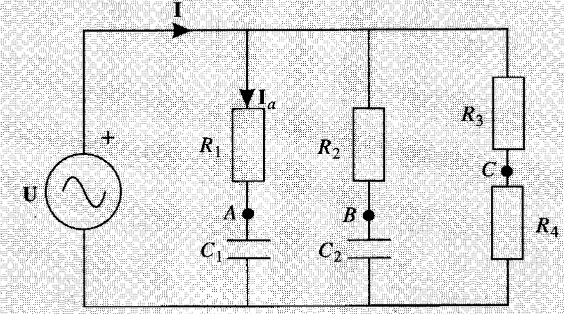
Obténgase:

1. El valor de las corrientes $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{I}$, y las tensiones $\mathbf{U}_L$ y $\mathbf{E}$, en módulo y arg
   Indíquese la expresión temporal de $i_C(t)$.
2. Balance de potencias activas y reactivas.

Solución

1. $\mathbf{I}_R = 20\underline{/0^{\circ}}$; $\mathbf{I}_L = 15{,}56\underline{/-90^{\circ}}$; $\mathbf{I}_C = 15{,}20\underline{/90^{\circ}}$; $\mathbf{I} = 20\underline{/-1{,}02^{\circ}}$; $\mathbf{U}_L = 19{,}98\underline{/88}$
   $\mathbf{E} = 221{,}26\underline{/5{,}18^{\circ}}$. $i_C(t) = 15{,}20\sqrt{2}\cos(314{,}16t + 1{,}57)$
2. $P_g = 4400$ W; $Q_g = 478{,}15$ VAr. $Q_{L1} = 399{,}74$ VAr;
   $Q_L = 3423{,}6$ VAr; $Q_C = -3345{,}2$ VAr; $P_R = 4400$ W

2.8. Del circuito de la figura se conoce la tensión del generador $\mathbf{U} = 10\underline{/0^{\circ}}$ V, la frecu del generador $f = 500/\pi$ Hz, y la corriente $\mathbf{I}_a = 1\underline{/60^{\circ}}$ A. Además, se sabe que el mó de las corrientes por las tres ramas en paralelo es el mismo.



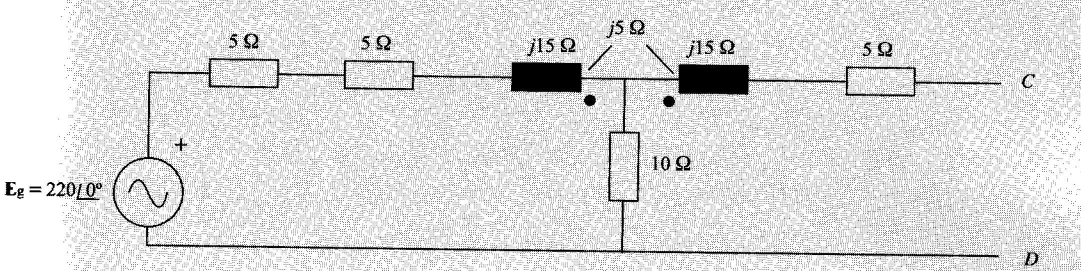
Se pide:

1. Determinar el valor de todos los elementos del circuito para que las tensiones AB, BC y CA tengan el mismo módulo, y estén desfasadas entre sí 120°.
2. Determinar el valor de la corriente **I** del generador en estas condiciones.

SOLUCIÓN

1. $R_1 = R_3 = R_4 = 5\ \Omega$; $R_2 = 5\sqrt{3}\ \Omega$; $C_1 = 115{,}47\ \mu\text{F}$; $C_2 = 200\ \mu\text{F}$
2. $\mathbf{I} = 2{,}366 + j1{,}366 = 2{,}732\underline{/30^\circ}$

Dado el circuito de la figura, calcúlese el equivalente Thévenin visto desde los terminales *C-D*.

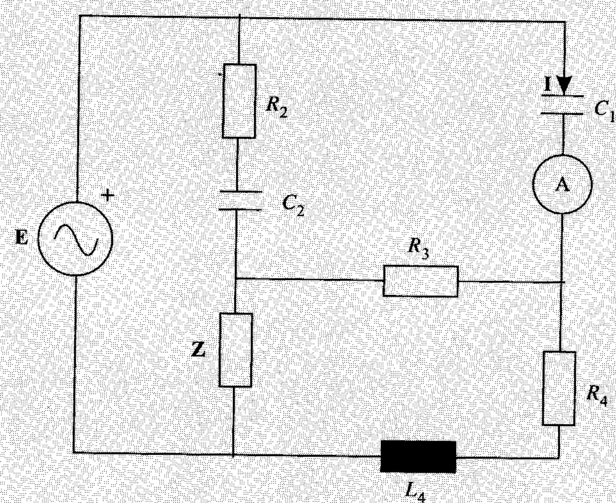


SOLUCIÓN

$\mathbf{E}_{th} = 98{,}38\underline{/-10{,}3^\circ}$; $\mathbf{Z}_{th} = 17\underline{/+53{,}13^\circ}$

En el circuito de la figura, determínese el valor de la impedancia **Z** y realícese el balance de potencias, sabiendo que la intensidad **I** está en fase con la tensión de la fuente.

Datos: $e(t) = 56{,}5685 \cos 100t$; $C_1 = 5$ mF; $R_2 = 10\ \Omega$; $C_2 = 0{,}5$ mF; $R_3 = 2\ \Omega$. $R_4 = 8\ \Omega$; $L_4 = 40$ mH. La lectura del amperímetro es de 10 A.



SOLUCIÓN

$\mathbf{Z} = 5 + j3{,}333\ \Omega$. Potencia activa suministrada por la fuente: 440 W. Potencia activa consumida por las resistencias: 440 W. Potencia reactiva consumida por condensadores y bobinas: 0 VAr.

CUESTIONES PROPUESTAS

2.1. Un circuito está formado por una fuente de tensión alterna ideal de 1 V de valor efic conectada a una rama formada por una resistencia, una bobina y un condensador en seri La fuente suministra 1 A con $\cos\varphi = 1$. Los mismos elementos pasivos se conectan e paralelo entre sí, y el conjunto a una fuente de tensión alterna ideal de valor $\mathbf{E} = 15\underline{/0}$ (valor eficaz) de la misma frecuencia que la anterior. Indíquese la corriente suministrad por la fuente en módulo y en argumento.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{I} = 15\underline{/0^\circ}\ \mathrm{A}$$

2.2. Una fuente de tensión alterna ideal alimenta dos ramas conectadas en paralelo. Una d ellas es una bobina, y la otra un dipolo pasivo. Indíquese el factor de potencia (precisand si es inductivo o capacitivo) del conjunto de las dos ramas, si los valores eficaces de l corriente suministrada por la fuente y la que circula por cada una de las ramas son igual entre sí.

SOLUCIÓN

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{(inductivo)}$$

2.3. Una red monofásica alimenta dos cargas en paralelo. Los datos de estas cargas son: $S_1 = 10$ kVA; $\cos\varphi_1 = 0{,}8$ inductivo; $S_2 = 15$ kVA; $\cos\varphi_2 = 0{,}9$ capacitivo. Calcúlese el módulo de la potencia aparente entregada por la red.

SOLUCIÓN

$$S = 21{,}5\ \mathrm{kVA}$$

2.4. La admitancia $\mathbf{Y}_1 = 1 + j$ (S) está conectada en paralelo con la asociación en serie de las admitancias $\mathbf{Y}_2 = 1 - j$ (S) e $\mathbf{Y}_3 = 1 + j$ (S). El conjunto de las tres admitancias absorbe una corriente de $I = 3\sqrt{2}$ A. Calcúlese la impedancia equivalente del conjunto, y la potencia consumida por éste.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{Z}_{eq} = (2 - j)/5\ (\Omega); \qquad P = 36/5\ \mathrm{W}$$

2.5. A una impedancia $\mathbf{Z}$ de factor de potencia 0,85 se le aplica una tensión $U = 100$ V y consume una potencia activa $P = 100$ W. Calcúlese el valor de $\mathbf{Z}$.

SOLUCIÓN

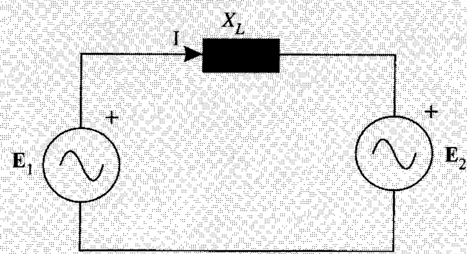
$$\mathbf{Z} = 72{,}25 + j44{,}7\ (\Omega)$$

2.6. Las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ están conectadas en serie con una fuente de tensión $\mathbf{E}$. Se sabe que $\mathbf{Z}_1$ es inductiva y que las tensiones en ambas impedancias tienen el mismo valor eficaz que $\mathbf{E}$. Calcúlese el argumento de las tensiones en las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{E} = E\underline{/-60^\circ}; \ \mathbf{U}_1 = E\underline{/0^\circ}; \ \mathbf{U}_2 = E\underline{/-120^\circ}$$

7. Dos fuentes ideales de tensión $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$, y de valor 100 V, están unidas entre sí por una reactancia inductiva de valor 1 Ω. Si la corriente $\mathbf{I}$ está retrasada 30° con respecto a $\mathbf{E}_1$. Calcúlese el balance de potencias activas y reactivas del circuito.



SOLUCIÓN

$$P_2 = 5.000\sqrt{3}\ \text{W};\ Q_2 = -5.000\ \text{VAr};\ P_1 = 5.000\sqrt{3}\ \text{W};\ Q_1 = 5.000\ \text{VAr};\ Q_L = 10.000\ \text{VAr}$$

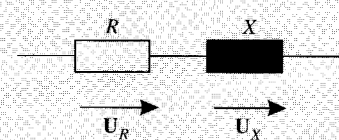
(con los criterios de signos de la figura)

8. Una impedancia capacitiva está conectada a una fuente de tensión de valor eficaz $U = 100$ V. Absorbe una potencia media de 100 W y una potencia instantánea máxima de 215 W. Hállese el valor de la impedancia.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{Z} = 86{,}95\underline{/-29{,}6^\circ}$$

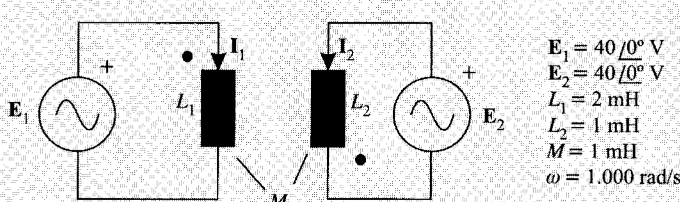
9. En el circuito de la figura $X > 0$. Indíquese el factor de potencia de la impedancia $R + jX$, precisando si es inductivo o capacitivo. $\mathbf{U}_R = 6$ V; $\mathbf{U}_X = 15$ V.



SOLUCIÓN

$$\cos\varphi = 0{,}371 \text{ (inductivo)}$$

10. Calcúlense las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en el circuito de la figura.



SOLUCIÓN

$$\mathbf{I}_1 = -j80\ \text{A};\ \mathbf{I}_2 = -j120\ \text{A}$$

CAPÍTULO 3

SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS

1. DEFINICIÓN DE TENSIONES TRIFÁSICAS

Un sistema trifásico es aquel en el que sus elementos están dispuestos en tres fases. Una fase es «cada una de las partes de un circuito en que se genera, se transmite, o se utiliza una de las tensiones del sistema». Las tensiones que aparecen en un sistema trifásico equilibrado de *secuencia directa* como el que se muestra en la Figura 3.1 son:

$$\mathbf{E}_a = E\underline{/0}$$

$$\mathbf{E}_b = E\underline{/-2\pi/3}$$

$$\mathbf{E}_c = E\underline{/2\pi/3}$$

$$\mathbf{U}_{ab} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b = \sqrt{3}\cdot E\underline{/\pi/6}$$

$$\mathbf{U}_{bc} = \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_c = \sqrt{3}\cdot E\underline{/\pi/6 - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{U}_{ca} = \mathbf{E}_c - \mathbf{E}_a = \sqrt{3}\cdot E\underline{/\pi/6 + 2\pi/3}$$

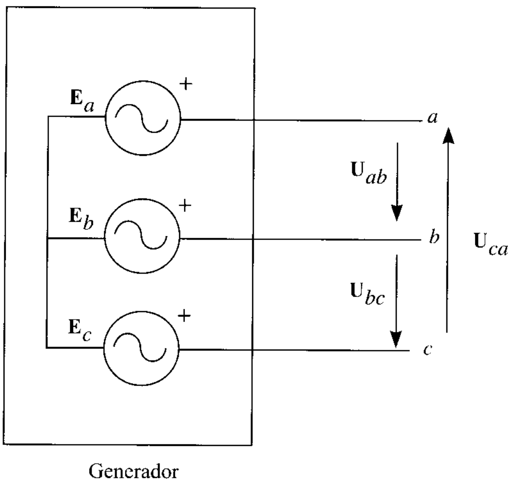


Figura 3.1. Tensiones de un sistema trifásico.

Si la *secuencia* es *inversa*, las tensiones son:

$$\mathbf{E}_a = E\underline{/0}$$
$$\mathbf{E}_b = E\underline{/2\pi/3}$$
$$\mathbf{E}_c = E\underline{/-2\pi/3}$$

Los diagramas vectoriales que representan las tensiones indicadas se muestran en la Figura 3.2.

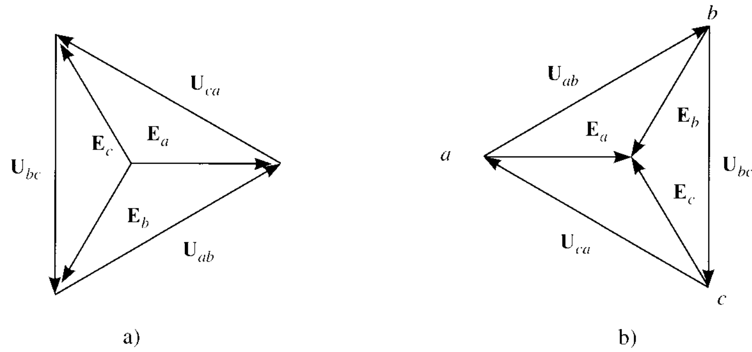


Figura 3.2.

3.2. CORRIENTES EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

En un sistema de tres impedancias conectadas en estrella, si las tensiones que hay en cada una de las fases son $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_b$, $\mathbf{U}_c$ y cada una de las impedancias es $\mathbf{Z}_Y = Z_Y\underline{/\varphi}$, las corrientes que circulan por ella serán:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/\varphi} = I\underline{/\varphi}$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{U}_b}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/-\varphi - 2\pi/3} = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{U}_c}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/-\varphi + 2\pi/3} = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3}$$

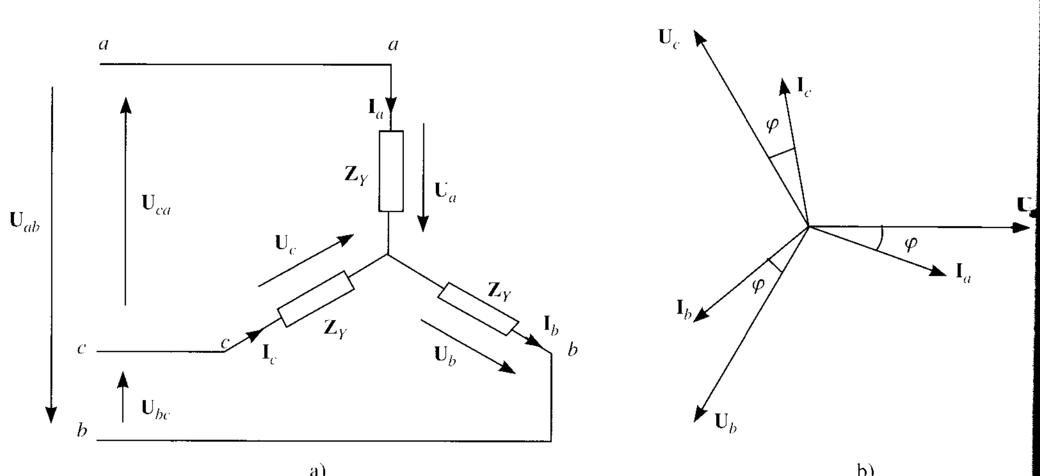


Figura 3.3.

Si conectan en triángulo tres impedancias iguales $\mathbf{Z}_\Delta$ tales que formen un sistema en triángulo equivalente al previo en estrella ($\mathbf{Z}_\Delta = 3 \cdot \mathbf{Z}_Y$), las corrientes que circularán por cada una de las impedancias serán:

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{U}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \underline{/\pi/6 - \varphi} = \frac{I}{\sqrt{3}} \underline{/\pi/6 - \varphi}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{U}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3} = \frac{I}{\sqrt{3}} \underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{U}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3} = \frac{I}{\sqrt{3}} \underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3}$$

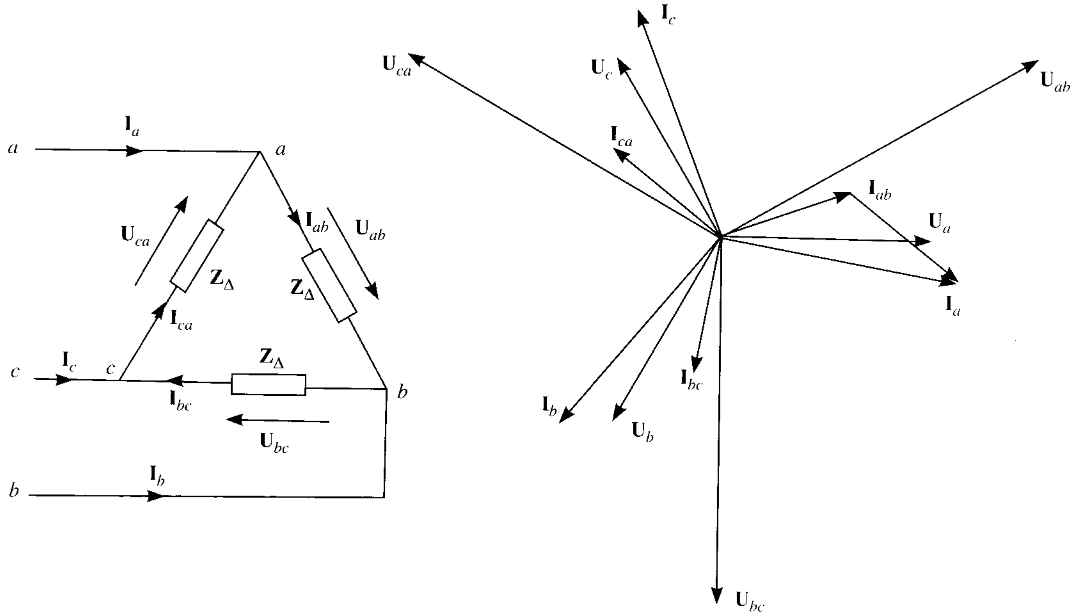


Figura 3.4.

Corrientes $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$:

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} = I\underline{/-\varphi}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{ca} - \mathbf{I}_{cb} = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3}$$

Hay que observar que en un sistema con tres hilos, la aplicación de la primera ley de Kirchhoff implica que:

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$$

3.3. MAGNITUDES DE FASE Y DE LÍNEA

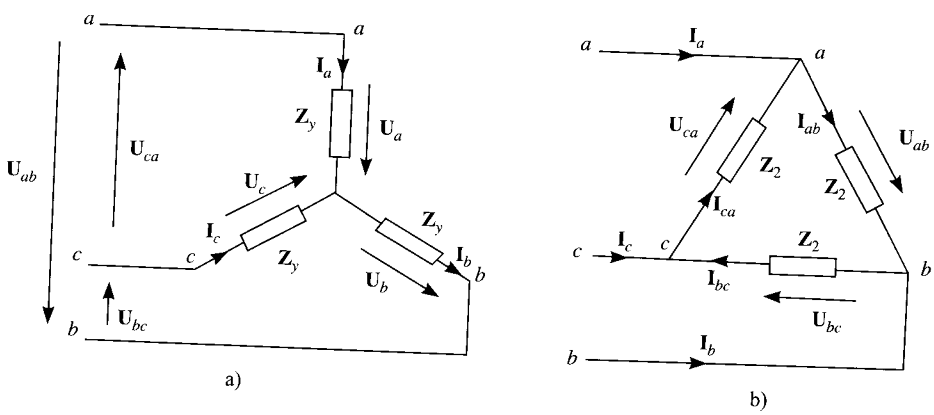


Figura 3.5.

- **Magnitudes de línea:**

$$\mathbf{I}_a = I\underline{/-\varphi} \qquad \mathbf{U}_{ab} = U\underline{/\pi/6}$$

$$\mathbf{I}_b = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_{bc} = U\underline{/\pi/6 - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_{ca} = U\underline{/\pi/6 + 2\pi/3}$$

- **Magnitudes de fase:**

En triángulo

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3}$$

En estrella

$$\mathbf{U}_a = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/0}$$

$$\mathbf{U}_b = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-2\pi/3}$$

$$\mathbf{U}_c = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/2\pi/3}$$

3.4. CONVERSIÓN DE FUENTES REALES DE ESTRELLA A TRIÁNGULO Y VICEVERSA

- **Paso de Y a Δ**

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3 \cdot \mathbf{Z}_Y \qquad \mathbf{E}_{ab} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b$$

- **Paso de Δ a Y**

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 \qquad \mathbf{E}_a = \frac{\mathbf{E}_{ab} - \mathbf{E}_{bc}}{3}$$

5. CIRCUITOS MONOFÁSICOS EQUIVALENTES

• Circuito equivalente fase-neutro

Sea un sistema trifásico equilibrado como el representado en la Figura 3.6 en la que tanto el receptor como el generador están conectados en estrella, y ambos están enlazados por una línea trifásica.

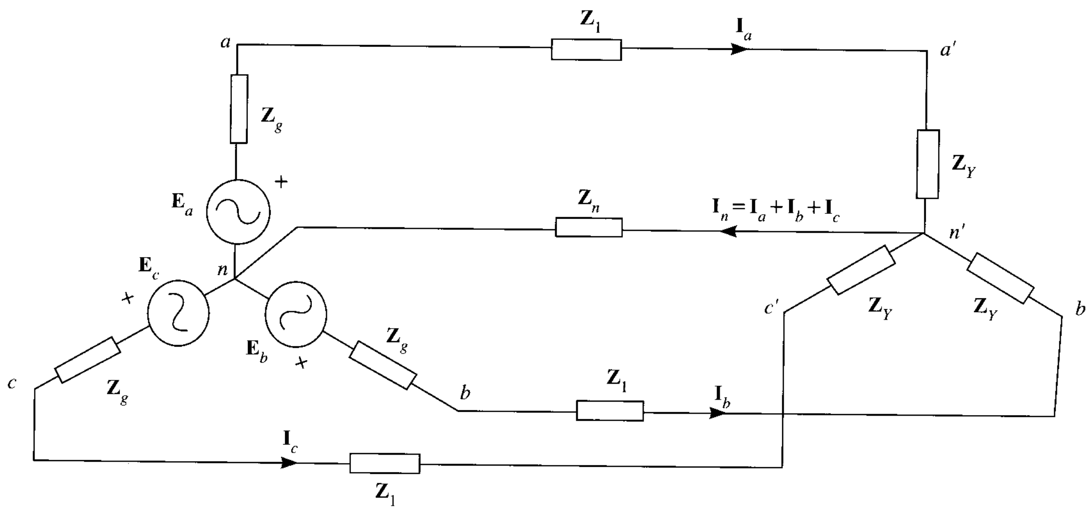


Figura 3.6.

Un circuito equivalente que tuviera la misma relación entre la tensión en la fuente y la corriente sería el representado en la Figura 3.7.

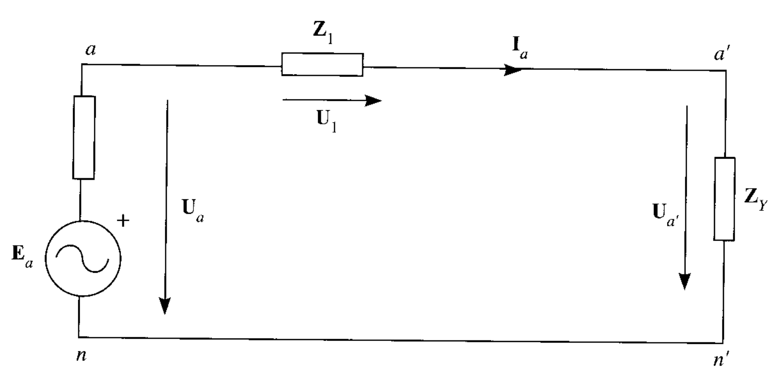


Figura 3.7.

La corriente $\mathbf{I}_a$ se puede obtener mediante la expresión:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_Y}$$

Las tensiones $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_{a'}$ se obtendrán de la forma siguiente:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{Z}_Y \cdot \mathbf{I}_a \qquad \mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{I}_a \qquad \mathbf{U}_{a'} = \mathbf{E}_a - \mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_a$$

A partir de estas magnitudes en la fase a se pueden obtener las magnitudes en las fases b y c, siempre y cuando el sistema sea equilibrado.

Si las fuentes no estuvieran conectadas en estrella, sino en triángulo, podrían transformarse en fuentes conectadas en estrella. Lo mismo sucede con las cargas: un sistema de impedancias conectadas en triángulo siempre puede convertirse en otro de impedancias conectadas en estrella mediante una transformación de estrella a triángulo.

3.6. POTENCIAS ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE

Potencias activa y reactiva en función de las magnitudes de fase:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3 \cdot P_F = 3U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = 3 \cdot Q_F = 3U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Potencia activa y reactiva en función de las magnitudes de línea:

$$P = \sqrt{3}U \cdot I\cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3}U \cdot I\operatorname{sen}\varphi$$

Hay que hacer notar que el ángulo φ es el desfase entre las tensiones y las corrientes *de fase*. La potencia reactiva consumida es positiva si la carga es inductiva.

Potencia aparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U \cdot I$$

Potencia aparente compleja:

$$\mathbf{S} = P + j \cdot Q = \sqrt{3}U \cdot I(\cos\varphi + j \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

Factor de potencia:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{3}U \cdot I}$$

La potencia instantánea absorbida por un sistema trifásico equilibrado es constante, e igual al valor de la potencia activa.

3.7. COMPENSACIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

Sea un sistema trifásico con una potencia P y un factor de potencia $\cos\varphi$ al que se conecta en paralelo una batería de condensadores para aumentar su factor de potencia a $\cos\varphi'$.

- **Valor de la batería si se conecta en estrella**

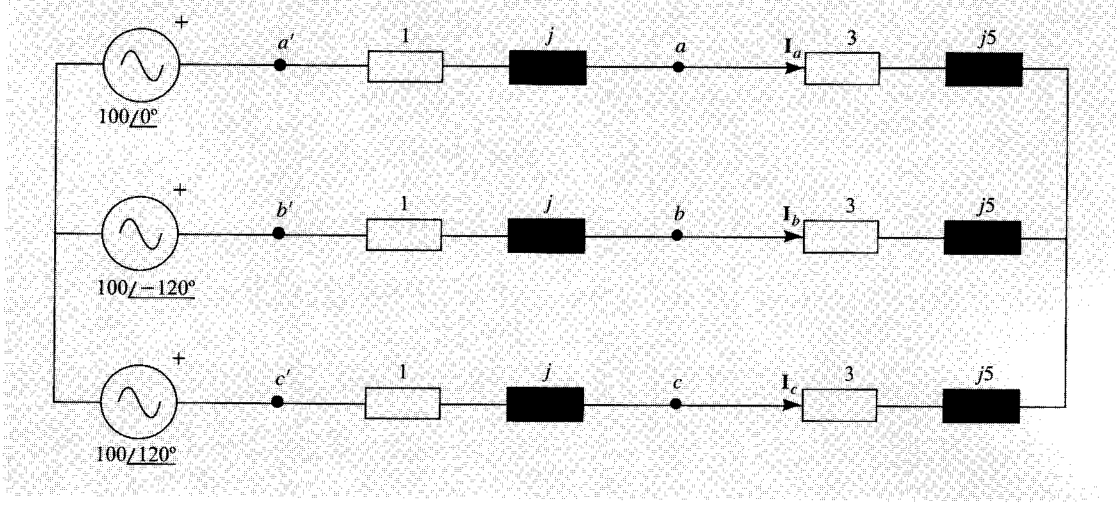
$$C_Y = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

- **Valor de la batería si se conecta en triángulo**

$$C_\Delta = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2}$$

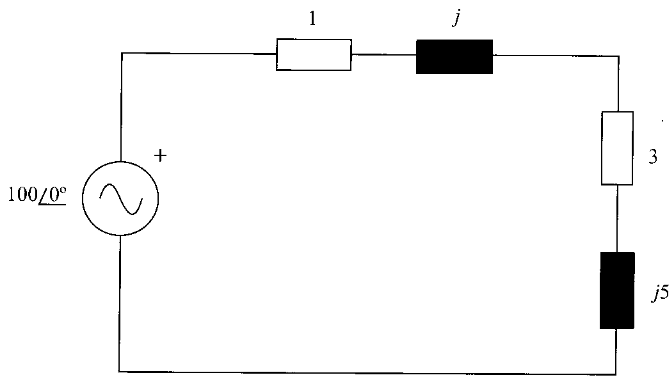
PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Calcular las corrientes de línea en el sistema trifásico equilibrado de la figura.



SOLUCIÓN

Puesto que se trata de un circuito trifásico equilibrado, se puede obtener el circuito monofásico equivalente, cuya obtención es inmediata al estar conectadas en estrella, tanto la fuente como las cargas. El circuito equivalente es el siguiente:



Por tanto, la corriente que circula por la fase a tiene el valor:

$$\mathbf{I}_a = \frac{100}{1 + j + 3 + j5} = \frac{100}{4 + j6} = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ}$$

Y consecuentemente,

$$\mathbf{I}_b = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ - 120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_c = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ + 120^\circ}$$

Valor de las tensiones:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{I}_a(3 + j5) = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ} - 5{,}831\underline{/59{,}036} = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ}$$

$$U_b = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ - 120^\circ}$$

$$U_c = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ + 120^\circ}$$

Caída de tensión en cada una de las fases de la línea:

$$\Delta U_a = \mathbf{I}_a(1 + j) = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ} \cdot \sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ}$$

$$\Delta U_b = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ - 120^\circ}$$

$$\Delta U_c = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ + 120^\circ}$$

3.2. En la figura se representa un circuito trifásico equilibrado en carga y de secuencia directa, siendo la tensión de línea en el generador supuesto ideal 220 V (eficaz).

$$\mathbf{Z}_L = 1 + j \quad , \quad \mathbf{Z}_1 = 10(3 - j) \quad , \quad \mathbf{Z}_2 = 10(2 + j)$$

La frecuencia es de 50 Hz. Se pide:

1. Intensidad de línea en el generador.

2. Tensión de fase en cada una de las cargas.

3. Intensidad de línea en cada una de las cargas.

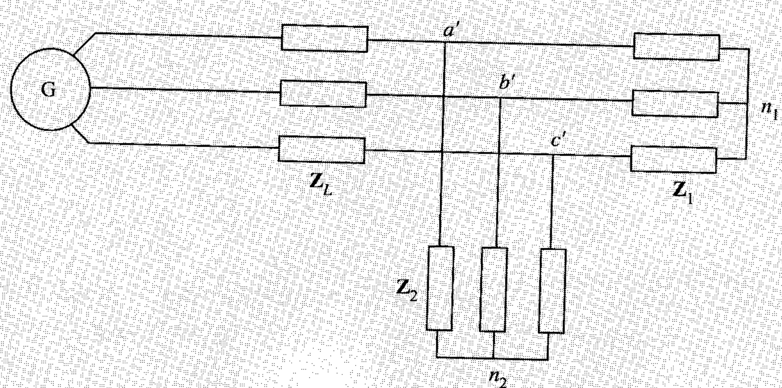
4. Potencia activa y reactiva consumida por cada carga.

5. Dibujar dónde se colocaría un vatímetro para medir la potencia reactiva consumida por el conjunto de ambas cargas indicando lo que marcaría dicho vatímetro.

6. Potencia perdida en la línea.

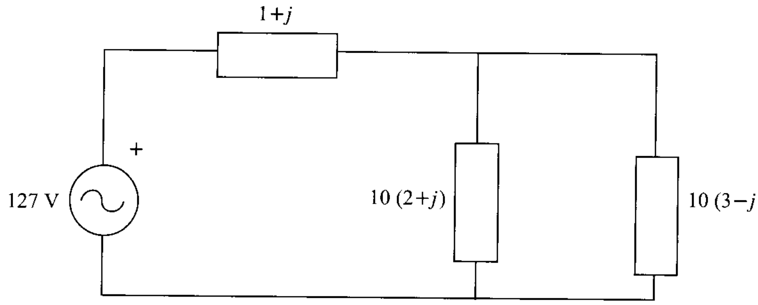
7. Indicar la capacidad por fase de la batería de condensadores que debería colocarse en triángulo, en paralelo con la carga conjunto de ambas, para que el total presentase $\cos\varphi = 1$.

8. *Ídem* si se conectase en estrella.



Solución

1. El equivalente monofásico fase-neutro será el siguiente:



La impedancia equivalente de las dos cargas es, puesto que están conectadas en paralelo:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 14}$$

A partir de aquí se obtiene el valor de la corriente de línea (coincidente con la de fase a):

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_{eq}} = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ}\ \text{A}$$

Las corrientes de las tres fases serán, por tanto:

$$\mathbf{I}_a = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_b = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ - 120^\circ}\ \text{A} = 8{,}3\underline{/-123{,}81^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_c = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ + 120^\circ}\ \text{A} = 8{,}3\underline{/116{,}19^\circ}\ \text{A}$$

2. La tensión de fase en ambas cargas es la misma por estar conectadas en paralelo:

$$\mathbf{U}_{a'n1} = \mathbf{U}_{a'n2} = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{Z}_{eq} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{b'n1} = \mathbf{U}_{b'n2} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{c'n1} = \mathbf{U}_{c'n2} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

3. La intensidad de línea en cada una de las cargas es:

$$\mathbf{I}_{a1} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{a2} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

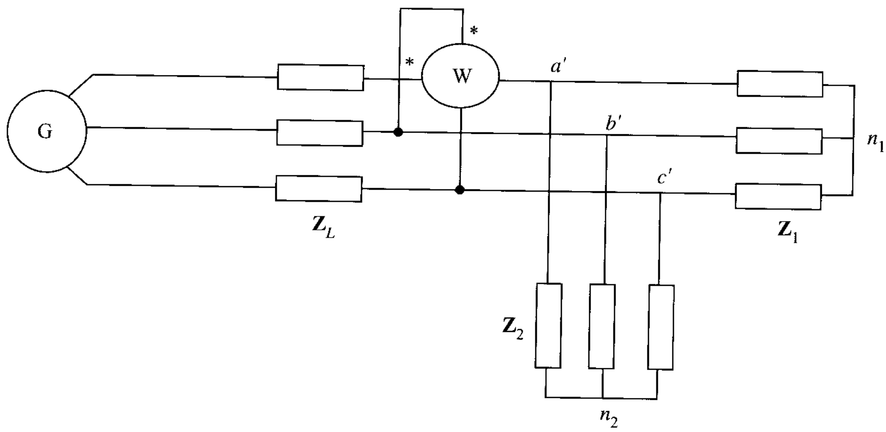
4. Potencia consumida por cada una de las cargas:

$$\mathbf{S}_1 = 3 \cdot (\mathbf{U}_{a'n1}\mathbf{I}^*_{a1}) = 3\mathbf{Z}_1 I^2_{a1} = 1.252,6 - 417,39$$
$$\mathbf{S}_2 = 3 \cdot (\mathbf{U}_{a'n1}\mathbf{I}^*_{a2}) = 3\mathbf{Z}_2 I^2_{a2} = 1.666,37 + j833,19$$

Luego:

$$P_1 = 1.252,16 \text{ W} \qquad Q_1 = -417,39 \text{ VAr}$$
$$P_2 = 1666,37 \text{ W} \qquad Q_2 = 833,19 \text{ VAr}$$

5. El vatímetro se colocaría con la bobina amperimétrica en serie con la fase a' y la bobi voltimétrica en paralelo con las fases b' y c', tal como muestra la figura:



La medida del vatímetro sería proporcional a la potencia reactiva consumida por las dos cargas:

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}} = 241 \text{ W}$$

6. La potencia activa y reactiva perdidas en la línea son:

$$\Delta P_L = 3R_L I^2 = 3 \cdot 1 \cdot 8,43^2 = 213,19 \text{ W}$$
$$\Delta Q_L = 3X_L I^2 = 3 \cdot 1 \cdot 8,43_2 = 213,19 \text{ VAr}$$

7. Para compensar el factor de potencia a $\cos\varphi' = 1$, la potencia reactiva debe ser $Q' = P \cdot \operatorname{tg}\varphi' = 0$ VAr, y por tanto la diferencia entre la potencia reactiva inicial y final debe ser la que cedan los condensadores:

$$\Delta Q = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

Pero, si la batería de condensadores se conecta en triángulo: $\Delta Q = 3\omega C U^2$.
Igualando ambas expresiones se tiene el valor de la capacidad de cada condensador:

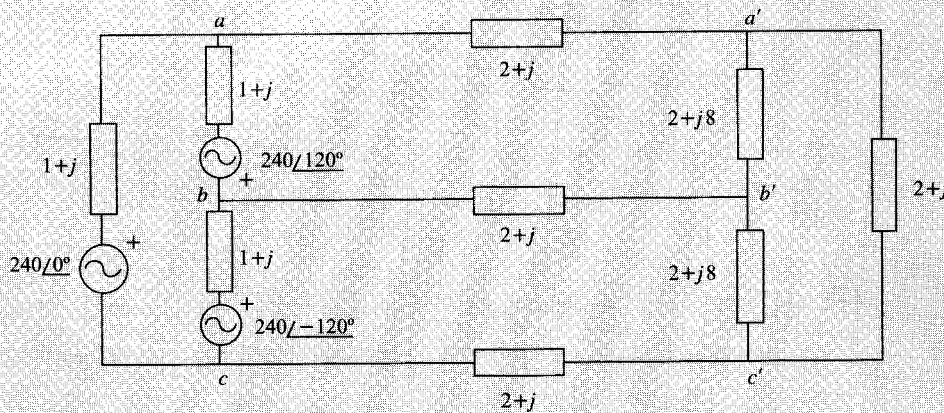
$$C_\Delta = \frac{\Delta Q}{3\omega U^2} = 10,6 \ \mu\text{F}$$

8. Si la batería de condensadores se conecta en estrella, la capacidad de cada condensador es:

$$C_Y = \frac{\Delta Q}{3\omega (U/\sqrt{3})^2} = 31,8 \ \mu\text{F}$$

3 Dado el sistema de la figura, calcular:

1. Intensidad de fase y de línea.
2. Tensiones en bornes del generador y del receptor.
3. Potencias activa y reactiva suministradas por el generador trifásico.
4. Potencias activa y reactiva consumidas por cada impedancia receptora y en la línea.
5. Comprobar aplicando el teorema de Boucherot.
6. Calcular lo que marcaría un vatímetro derivando su bobina de tensión entre a y b, e intercalando su bobina amperimétrica entre a y a'.



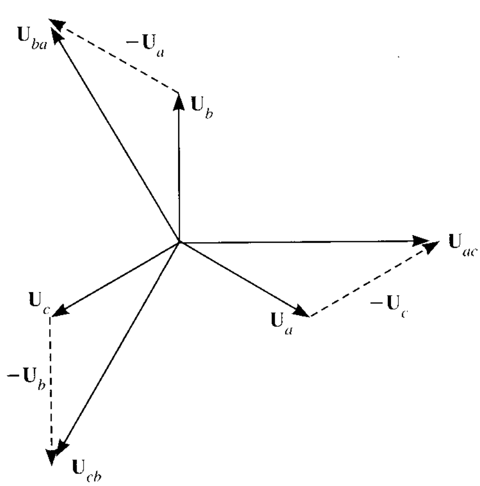
SOLUCIÓN

Para resolver este circuito es preciso, en primer lugar, obtener el equivalente monofásico fase-neutro, para lo cual hay que convertir las fuentes (reales) y la carga, ambas en triángulo, en sus respectivas estrellas equivalentes.

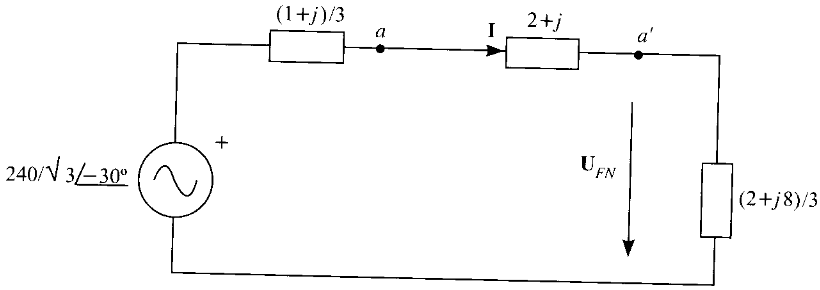
La fuente real entre fases del enunciado equivale a una fuente real en estrella que constará de una fuente ideal, cuyo valor eficaz será:

$$U = 240/\sqrt{3} = 138{,}56 \text{ V}$$

En cuanto a las fases, habrá que tener en cuenta los ángulos existentes entre las distintas fases, tal como se muestra en el diagrama vectorial siguiente.



En esta figura se puede comprobar que el sistema es de secuencia inversa, y que la
sión $\mathbf{U}_a$ tiene un argumento de $-30°$, tomando como referencia la tensión $\mathbf{U}_{ac}$. En cua
las impedancias, tanto de la fuente como de la carga, deberán dividirse entre 3 para ob
su valor equivalente en estrella. Esto se muestra en el circuito que aparece a continuación:



La intensidad de línea se obtiene de forma sencilla en este circuito:

$$\mathbf{I} = \frac{240/\sqrt{3}\underline{/-30°}}{3 + j4} = 27{,}71\underline{/-83{,}13°}$$

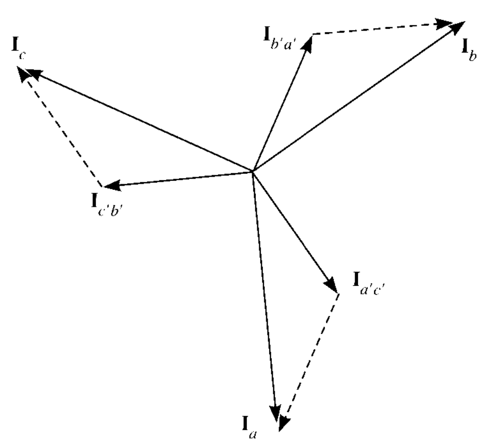
Y por tanto, la tensión fase-neutro en el equivalente monofásico de la carga, será:

$$\mathbf{U}_{FN} = 27{,}71\underline{/-83{,}13°} \cdot (2 + j8)/3 = 76{,}20\underline{/-7{,}17°}$$

La tensión fase-neutro en bornes del generador (punto a) será:

$$\mathbf{U}_{gFN} = \mathbf{U}_{FN} + (2 + j) \cdot \mathbf{I} = 125{,}76\underline{/-30{,}49°}$$

Una vez resuelto el circuito equivalente monofásico, se obtienen las corrientes de fase po
el circuito original, de acuerdo con el diagrama vectorial siguiente:



En él, el origen de fases sigue estando en $\mathbf{E}_{ca}$. Las corrientes de fase por los triángulos están adelantadas 30° con respecto a las corrientes de línea, y tienen una magnitud $\sqrt{3}$ veces menor. Por tanto:

$$\mathbf{I}_a = 27{,}71\underline{/-83{,}13°} \qquad \mathbf{I}_{a'c'} = 16\underline{/-53{,}13°}$$

$$\mathbf{I}_b = 27{,}71\underline{/-36{,}87°} \qquad \mathbf{I}_{b'a'} = 16\underline{/66{,}87°}$$

$$\mathbf{I}_c = 27{,}71\underline{/156{,}87°} \qquad \mathbf{I}_{c'b'} = 16\underline{/-173{,}13°}$$

En cuanto a las tensiones de línea en la carga (que coinciden con la tensión de fase), serán $\sqrt{3}$ superiores a las tensiones fase-neutro, y estarán adelantadas 30°.

$$\mathbf{U}_a = 76{,}20\angle{-7{,}17^\circ} \qquad \mathbf{U}_{a'c'} = 131{,}98\angle{22{,}83^\circ}$$

$$\mathbf{U}_b = 76{,}20\angle{112{,}83^\circ} \qquad \mathbf{U}_{b'a'} = 131{,}98\angle{142{,}83^\circ}$$

$$\mathbf{U}_c = 76{,}20\angle{-127{,}17^\circ} \qquad \mathbf{U}_{c'b'} = 131{,}98\angle{-97{,}17^\circ}$$

Las potencias se pueden hallar en el propio equivalente monofásico fase-neutro:

$$\mathbf{S}_g = 3 \cdot \mathbf{U}_{gFN} \cdot \mathbf{I}^* = 3 \cdot 125{,}76\angle{-29{,}18^\circ} \cdot 27{,}71\angle{83{,}13^\circ} = 6.152 + j8.452$$

Por tanto,

$$P_g = 6.152 \text{ W} \qquad Q_g = 8.452 \text{ VAr}$$

La fuente ideal generará:

$$\mathbf{S}_{gi} = 3 \cdot \mathbf{E}_{FN} \cdot \mathbf{I}^* = 3 \cdot 138{,}56\angle{-30^\circ} \cdot 27{,}71\angle{83{,}13^\circ} = 6.910 + 9.214$$

Es decir,

$$P_{gi} = 6.910 \text{ W} \qquad Q_{gi} = 9.214 \text{ VAr}$$

En cuanto al consumo en las distintas impedancias, será el siguiente

$$\mathbf{S}_{zg} = 3 \cdot I_{ac}^2 \mathbf{Z}_g = 3 \cdot 16^2 \cdot (1 + j) = 768 + j768$$

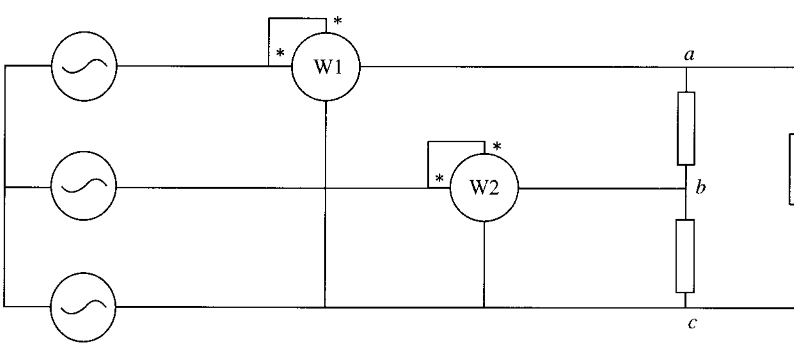
$$\mathbf{S}_l = 3 \cdot I^2 \mathbf{Z}_l = 3 \cdot 27{,}71^2 \cdot (2 + j) = 4.607 + j2.304$$

$$\mathbf{S}_c = 3 \cdot I_{a'c'} \mathbf{Z}_g = 3 \cdot 16^2 \cdot (2 + j8) = 1.536 + j6.144$$

Se puede comprobar que se cumple el teorema de Boucherot.

En cuanto al vatímetro, debido a las operaciones que tienen lugar en el mismo, tendría una lectura de:

$$W = 131{,}98 \cdot 27{,}71 \cdot \cos(22{,}83^\circ + 83{,}13^\circ) = -1.005 \text{ W}$$



La medida de cada vatímetro es:

$$W_1 = UI\cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a) = UI\cos(30^\circ + \varphi) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{180}{\sqrt{2}} \cos(30^\circ + 53{,}13^\circ) = 5.594 \text{ W}$$

$$W_2 = UI\cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b) = UI\cos(30^\circ - \varphi) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{180}{\sqrt{2}} \cos(30^\circ - 53{,}13^\circ) = 43.024 \text{ W}$$

La potencia activa y reactiva es:

$$P = W_1 + W_2 = 5.594 + 43.024 = 48.618 \text{ W}$$
$$Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}(43.024 - 5.594) = 64.831 \text{ VAr}$$

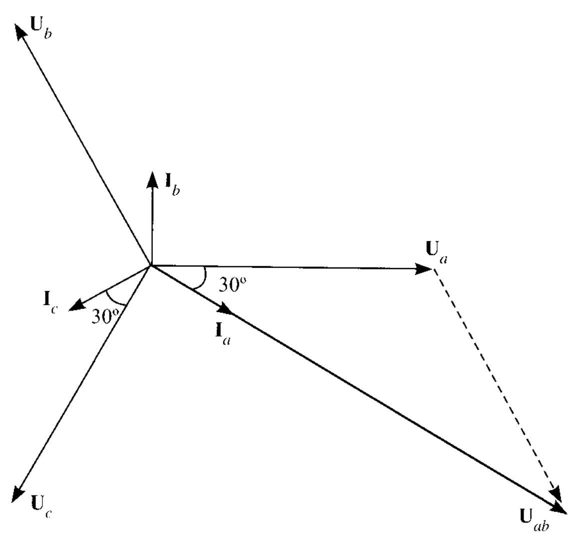
3.4. Un sistema trifásico está formado por una carga equilibrada conectada en triángulo y al mentada por una fuente en estrella, de la que se conocen las siguientes magnitudes:

$$u_a = 200\sqrt{2}\,\text{sen}\,\omega t$$
$$u_b = 200\sqrt{2}\,\text{sen}\,(\omega\tau + 2\pi/3)$$
$$u_c = 200\sqrt{2}\,\text{sen}\,(\omega t - 2\pi/3)$$
$$i_a = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,(\omega t - \pi/6)$$

Se conecta un vatímetro en el sistema, de forma que la bobina amperimétrica mida l intensidad entrante en la fase c y la bobina voltimétrica mida la tensión entre las fases a y b. ¿Cuánto marca este vatímetro? Deducirlo con la ayuda de un diagrama vectorial. ¿Qué tipo de información da este vatímetro?

SOLUCIÓN

El sistema de alimentación es de secuencia inversa. Se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades:



La corriente de la fase c está retrasada 30° respecto a la tensión. De la figura se observa que la tensión $\mathbf{U}_{ab}$ está adelantada 90° con respecto a la tensión $\mathbf{U}_c$, luego el ángulo formado por $\mathbf{I}_c$ y $\mathbf{U}_{ab}$ es 120°. La medida del vatímetro es, por tanto:

$$W = U_{ab}I_c \cos(\mathbf{I}_c, \mathbf{U}_{ab}) = 200\sqrt{3}\cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 200\sqrt{3}\cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.000 \text{ W}$$

Esta medida da información sobre la potencia reactiva consumida por la carga, pues por tratarse de un sistema de secuencia inversa la potencia reactiva es $Q = -\sqrt{3}\cdot W$. Se demuestra. Llamando φ al ángulo formado por tensión e intensidad de una misma fase, se tiene:

$$W = U_{ab}I_c \cos(\mathbf{I}_c, \mathbf{U}_{ab}) = UI\cos(90^\circ + \varphi) = UI(-\text{sen}\,\varphi) = -UI\,\text{sen}\,\varphi = -\frac{Q}{\sqrt{3}}$$

15. Tres impedancias iguales de $\cos\varphi = 0{,}8$ inductivo se conectan en estrella a un sistema de tensiones trifásico equilibrado de secuencia directa y tensión de línea 200 V. En estas condiciones la potencia consumida por cada impedancia es de 1.000 W. Se pide:

1. Calcular lo que consumiría cada impedancia si en vez de conectarse en estrella se conectasen en triángulo.

2. Valor de las intensidades de fase y de línea en estas condiciones.

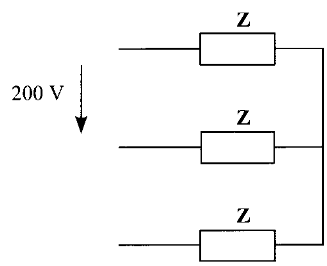
SOLUCIÓN

1. A partir de la expresión de la potencia activa total se calcula la intensidad de línea:

$$P = \sqrt{3}UI\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{3\cdot 1.000}{\sqrt{3}\cdot 200\cdot 0{,}8} = 10{,}82 \text{ A}$$

El módulo de cada impedancia en estrella es:

$$Z = \frac{U/\sqrt{3}}{I} = \frac{200/\sqrt{3}}{10{,}82} = 10{,}67\ \Omega$$

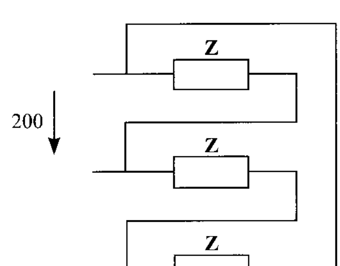


Si estas impedancias se conectaran en triángulo, la intensidad consumida por cada una sería:

$$I_\Delta = \frac{U}{Z} = \frac{200}{10{,}67} = 18{,}74\ \Omega$$

Y la potencia que consumiría cada impedancia en este caso:

$$P_\Delta = I_\Delta U\cos\varphi = 18{,}74\cdot 200\cdot 0{,}8 = 3.000 \text{ W}$$



2. Si la carga se conecta en triángulo la intensidad de fase es la calculada anteriormente, es decir, la que consume cada una de las impedancias:

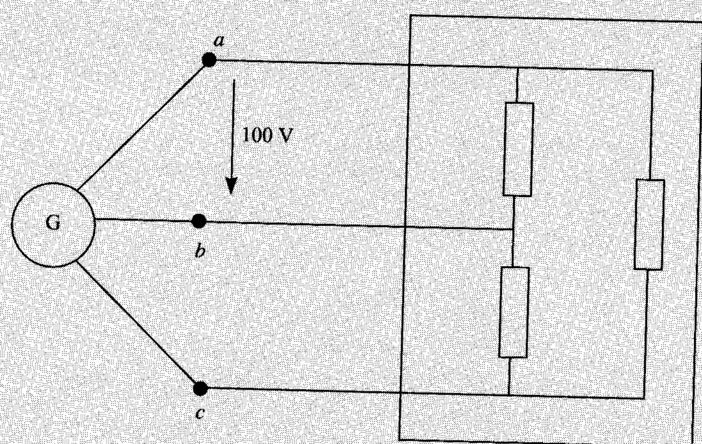
$$I_F = I_\Delta = 18{,}74 \text{ A}$$

Y la intensidad de línea:

$$I_L = \sqrt{3}I_\Delta = \sqrt{3} \cdot 18{,}74 = 32{,}46 \text{ A}$$

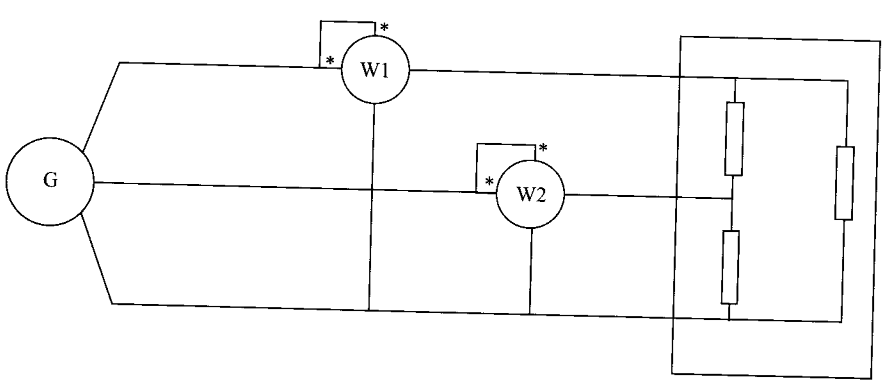
3.6. En la distribución trifásica equilibrada de la figura, la impedancia por fase de la c inaccesible es $4 + j3$. Se pide:

1. Dibujar dónde se colocarían dos vatímetros para medir la potencia consumida po cha carga. Calcular lo que indicaría cada vatímetro.
2. Si sólo dispusiésemos de un vatímetro, decir cómo deberíamos colocarlo para med potencia activa y calcular lo que marcaría.
3. *Ídem* para medir la potencia reactiva.
4. Calcular la capacidad de los condensadores que deberían colocarse en triángulo, en ralelo con la carga, para que el factor de potencia del conjunto fuese 0,9.



Solución

1. La colocación de los dos vatímetros para medir la potencia activa y reactiva consumidas por la carga sería la siguiente:



Para calcular la medida de cada vatímetro se calcula la impedancia compleja:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{UI}^* = 3\mathbf{U}\frac{\mathbf{U}^*}{\mathbf{Z}^*} = 3\frac{U^2}{\mathbf{Z}^*} = 3\frac{100^2}{4 - j3} = 4.800 + j3.600$$

Por tanto, las potencias activa y reactiva consumidas por la carga son:

$$P = 4.800 \text{ W}$$

$$Q = 3.600 \text{ VAr}$$

Estos valores se pueden calcular a partir de las medidas de los vatímetros de la figura según las siguientes expresiones:

$$W_1 + W_2 = P$$

$$W_1 - W_2 = Q/\sqrt{3}$$

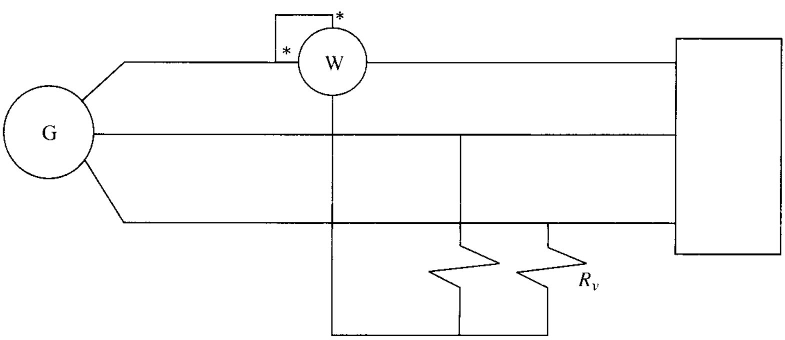
Por tanto, conocidas P y Q se tiene que las medidas de los vatímetros son:

$$W_1 = 3.439 \text{ W}$$

$$W_2 = 1.361 \text{ W}$$

2. Si se dispusiera de un solo vatímetro, debería conectarse como se indica a continuación, en cuyo caso el vatímetro marcaría la potencia consumida por una fase:

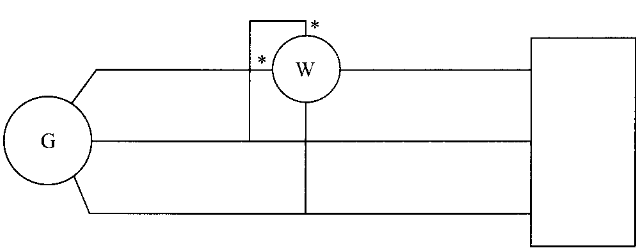
$$W = 4.800/3 = 1.600 \text{ W}$$



R_v es la resistencia de la bobina voltimétrica del vatímetro.

3. Si lo que se desea medir es la potencia reactiva, el vatímetro debe colocarse como indica la siguiente figura, en cuyo caso marcará:

$$W = Q/\sqrt{3} = 3.600/\sqrt{3} = 2.078{,}5 \text{ W}$$



4. La potencia reactiva que deben suministrar los condensadores es:

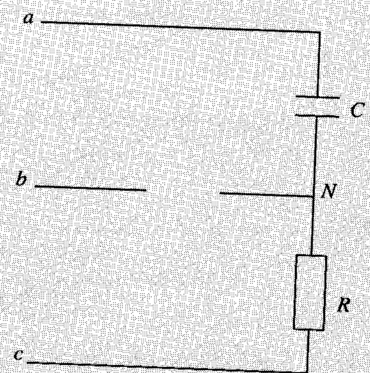
$$\Delta Q = P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

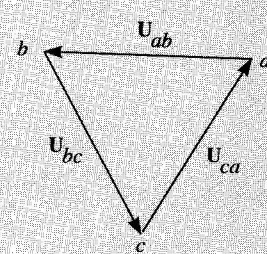
$$\Delta Q = 3\omega C_\Delta U^2$$

Igualando ambas expresiones y despejando, la capacidad del condensador conectado en gulo debe ser:

$$C_{\Delta} = \frac{\Delta Q}{3\omega U^2} = \frac{4.800(0,75 - 0,48)}{3 \cdot 100\pi \cdot 100^2} = 137,5\ \mu\text{F}$$

3.7. Las tensiones aplicadas a los terminales a, b y c constituyen el sistema trifásico equil do que se representa en el diagrama vectorial. Discutir si la tensión U_{bN} es mayor o m que la tensión de línea.

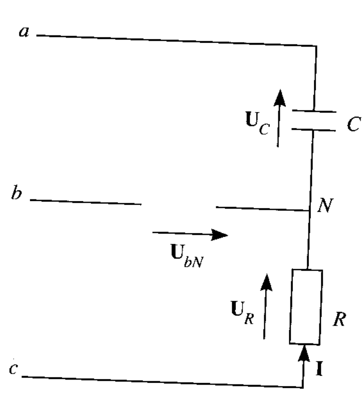




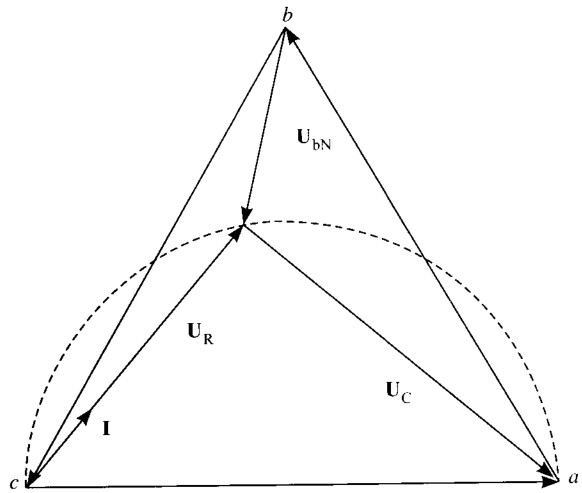
SOLUCIÓN

El diagrama vectorial adjunto representa las tensiones existentes en el circuito del en ciado. La corriente **I**, circulante entre los puntos a y c, es una corriente capacitiva, y tanto, estará adelantada con respecto a la tensión $\mathbf{U}_{ca}$. Esta corriente producirá dos caídas tensión, una resistiva, $\mathbf{U}_R$, en fase con **I**, y otra capacitiva, $\mathbf{U}_C$, retrasada 90° con respecto ella. La suma de ambas tensiones $\mathbf{U}_R$ y $\mathbf{U}_C$ tiene que ser igual a la tensión $\mathbf{U}_{ca}$. Dependien de los valores de la resistencia y del condensador, la corriente podrá estar más o menos ad lantada, pero, dado que la suma de ambas tensiones tiene que ser la tensión $\mathbf{U}_{ca}$, y que ángulo entre ellas tiene que ser de 90°, el lugar geométrico de los posibles puntos N tend que estar situado en una semicircunferencia de diámetro U_{ca}.

En cuanto a la tensión $\mathbf{U}_{bN}$, se representará mediante un segmento que iría desde el pun b hasta el N. Puesto que este último tiene que estar en algún punto de la semicircunferenci indicada, la longitud de este segmento será menor que la tensión de línea, cuyo valor es pro porcional a los lados del triángulo equilátero representado. Todo esto se muestra en el diagra ma vectorial adjunto.



Por tanto, $U_{bN} < U$, siendo U la tensión de línea aplicada.



3.8. El sistema trifásico de la figura de secuencia directa de fases, es equilibrado en las tensiones de entrada. Se conoce la tensión de línea que es de 200 V y que cuando el interruptor K está cerrado los vatímetros W_1 y W_2 dan los dos la misma lectura que es 2 kW. Se pide:

a) Factor de potencia de la instalación con el interruptor K cerrado.

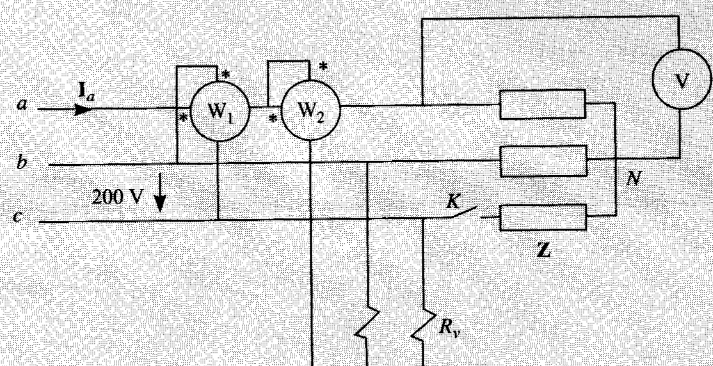
b) Valor de la impedancia $\mathbf{Z} = Z\angle\varphi$.

c) Lecturas de los vatímetros y del voltímetro cuando el interruptor K esté abierto.

Notas:

a) La resistencia R_v es de idéntico valor a la que presenta el circuito voltimétrico del vatímetro W_2.

b) El receptor en estrella equilibrado es de carácter inductivo.



SOLUCIÓN

a) La potencia reactiva consumida por el circuito, cuando está equilibrado, viene dada por la medida del vatímetro W_1:

$$W_1 = Q/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad Q = 2 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ kVAr} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Inductivo}$$

Por otra parte, la medida del vatímetro W_2 indica una tercera parte de la potencia activa consumida en la carga:

$$W_2 = P/3 \quad \Rightarrow \quad P = 2 \cdot 10^3 \cdot 3 = 6 \text{ kW}$$

Una vez conocidas P y Q, resulta inmediata la obtención del factor de potencia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

b) Para obtener la impedancia, es necesario conocer el valor de tensión y de corriente:

$$S = \sqrt{3} U I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{S}{\sqrt{3} U} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 200} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 200} = 20 \text{ A}$$

El módulo de la impedancia:

$$Z = \frac{U/\sqrt{3}}{I} = \frac{200/\sqrt{3}}{20} = \frac{10}{\sqrt{3}} \ \Omega$$

Y la impedancia compleja:

$$\mathbf{Z} = \frac{10}{\sqrt{3}} \underline{/30^\circ} \ \Omega$$

c) Cuando se abre el interruptor K, el circuito es desequilibrado, por lo que no se puede emplear los métodos de análisis de sistemas trifásicos. Se mantiene la tensión entre fases (de línea) de la fuente, pues se trata de una fuente equilibrada.

Por simple divisor de tensión, la tensión entre a y N viene dada por:

$$U_{aN} = U/2 = 100 \text{ V}$$

La tensión $\mathbf{U}_{cN}$ se obtiene sin más que aplicar la segunda ley de Kirchhoff a la malla b-N-c:

$$\mathbf{U}_{cN} = -\mathbf{U}_{bc} + \mathbf{U}_{bN} = 200\underline{/90^\circ} + 100\underline{/180^\circ} = -100 + j200 = 223{,}6\underline{/116{,}6^\circ} \text{ V}$$

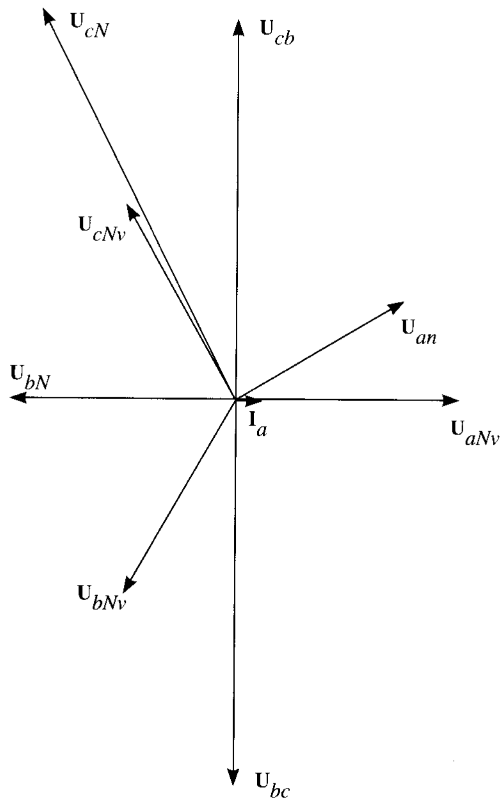
Y la corriente $\mathbf{I}_a$:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_{ab}}{2\mathbf{Z}} = \frac{200\underline{/30^\circ}}{2 \cdot 10/\sqrt{3}\underline{/30^\circ}} = 10\sqrt{3} \text{ A}$$

La medida de los vatímetros se obtiene a partir de la definición de la medida que proporcionan. Los ángulos se pueden comprobar en el diagrama vectorial adjunto:

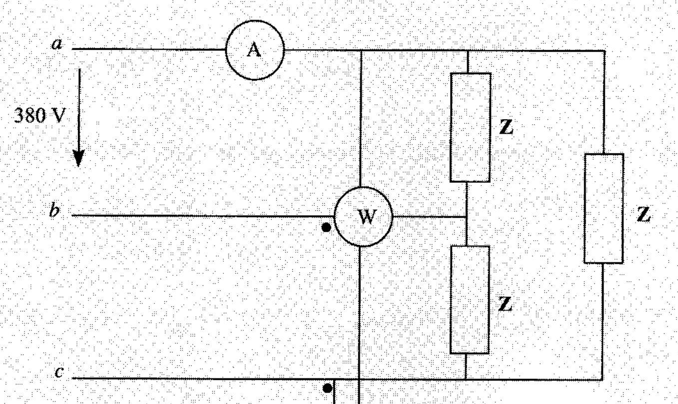
$$W_1 = U I_a \cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_a) = 200 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 0 = 0 \text{ W}$$

$$W_2 = U_{aN} I_a \cos(\mathbf{U}_{aN}, \mathbf{I}_a) = \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 1 = 2.000 \text{ W}$$



El sistema trifásico de secuencia directa de la figura, es equilibrado en las tensiones de entrada. Este sistema trifásico, de frecuencia 50 Hz y tensión de línea 380 V alimenta una carga de tipo inductivo conectada en triángulo. En estas condiciones, la lectura del amperímetro A es de 4 A y la del vatímetro W de 912 W. Se pide:

1. Intensidad de fase.
2. Valor de la impedancia de carga.
3. Capacidad por fase de los condensadores conectados en estrella, en paralelo con la carga, necesarios para que el factor de potencia de conjunto sea igual a 0,95 inductivo.
4. Intensidad de línea consumida por el conjunto carga-batería de condensadores.



SOLUCIÓN

a) Por estar la carga en triángulo, la intensidad de fase $\sqrt{3}$ es menor que la intensid línea, es decir:

$$I_F = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ A}$$

b) Para calcular la impedancia de carga, tenemos en cuenta que el vatímetro está colo de forma que permite medir la potencia reactiva consumida por la carga:

$$Q = \sqrt{3} \cdot W = \sqrt{3} \cdot 912 = 1.580 \text{ VAr}$$

Por otra parte, la potencia aparente consumida por la carga es:

$$S = 3 \cdot U_F \cdot I_F = 3 \cdot 380 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.632{,}7 \text{ VA}$$

A partir de Q y S podemos calcular la potencia activa y el factor de potencia:

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2} = \sqrt{2.632{,}7^2 - 1.580^2} = 2.160 \text{ W}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = 0{,}8$$

El módulo de la impedancia **Z** es:

$$Z = \frac{U_F}{I_F} = \frac{380}{4/\sqrt{3}} = 164{,}5\ \Omega$$

Por tanto, la impedancia compleja de carga es:

$$\mathbf{Z} = 164{,}5(0{,}8 + j0{,}6) = 131{,}6 + j98{,}7\ \Omega$$

c) La potencia reactiva que debe ceder la batería de condensadores conectada en estrella viene dada por las siguiente expresiones:

$$\Delta Q = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

$$\Delta Q = 3\omega C\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2 = \omega C U^2$$

Igualando ambas expresiones se tiene que la capacidad de cada condensador debe ser:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2} = \frac{2.106(0{,}75 - 0{,}33)}{100\pi \cdot 380^2} = 19{,}56\ \mu\text{F}$$

d) Por último, la intensidad de línea consumida por el conjunto carga-batería de condensadores es:

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi'} = \frac{2.106}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}95} = 3{,}37 \text{ A}$$

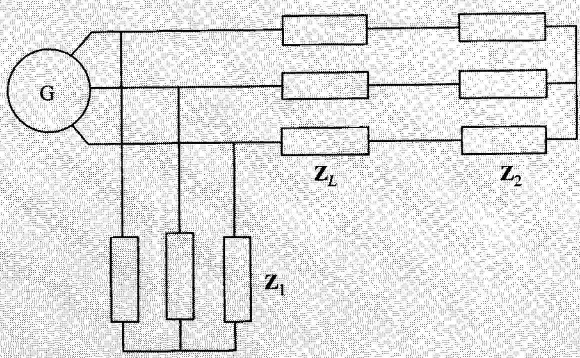
En la figura se representa un sistema trifásico equilibrado. La fuente cede 10 kW. Se pide:

a) Intensidad de línea a la salida del generador.

b) Pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea.

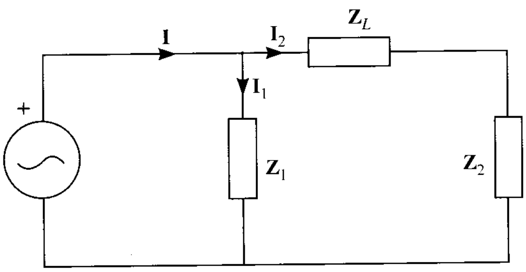
c) Tensión de línea en la carga 1 y en la carga 2

$\mathbf{Z}_1 = 1 + j2$ $\quad\quad$ $\mathbf{Z}_2 = 1 + j2$ $\quad\quad$ $\mathbf{Z}_L = 2 + j4$



SOLUCIÓN

a) El equivalente monofásico fase-neutro del circuito será:



La impedancia equivalente de la asociación de $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_L$ y $\mathbf{Z}_2$, es:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_L)}{\mathbf{Z}_1 + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_L)} = \frac{(1 + j2)((1 + j2) + (2 + j4))}{(1 + j2) + ((1 + j2) + (2 + j4))} = \frac{3}{4}(1 + j2)\ \Omega$$

$$P = 3RI^2 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{P}{3R}} = \sqrt{\frac{10.000}{3 \cdot 3/4}} = \frac{200}{3}\ \text{A}$$

b) Se calculan las pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea:

$$I_2 = \left| \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_L} \right| I = \left| \frac{1 + j2}{4 + j8} \right| \frac{200}{3} = \frac{50}{3}\ \text{A}$$

$$\Delta P_L = 3R_L I_2^2 = 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{5.000}{3}\ \text{W}$$

$$\Delta Q_L = 3X_L I_2^2 = 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{10.000}{3}\ \text{VAr}$$

c) En el circuito equivalente fase-neutro dibujado en el primer apartado, se puede obs que la tensión monofásica en la carga 1 se puede calcular como:

$$U_{1FN} = I \cdot Z_{eq} = \frac{200}{3} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{5} = 50\sqrt{5} \text{ V}$$

Y la tensión monofásica en la carga 2:

$$U_{2FN} = I_2 \cdot Z_2 = \frac{50}{3} \sqrt{5} \text{ V}$$

Luego, la tensión de línea en cada una de las cargas viene dada por las expresiones:

$$U_1 = \sqrt{3}\, U_{1FN} = \sqrt{3} \cdot 50\sqrt{5} = 193{,}65 \text{ V}$$

$$U_2 = \sqrt{3}\, U_{2FN} = \sqrt{3} \cdot \frac{50}{3} \sqrt{5} = 64{,}54 \text{ V}$$

3.11. Un calefactor constituye una carga trifásica, equilibrada y resistiva pura. En su placa de características viene la indicación: 5 kW; 380 V. Se conecta dicho calefactor a una red trifásica equilibrada de 380 V a través de 3 cables idénticos, de resistencia 1,5 Ω por cable. En estas condiciones, determinar:

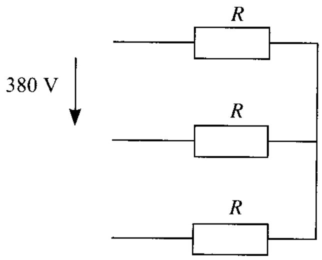
a) La potencia activa consumida por el calefactor.

b) La potencia cedida por la red.

Solución

Para la resolución del problema se supondrá que la carga está conectada en estrella, para que cada resistencia soporte menos tensión. Los resultados, sin embargo, no dependerán de la configuración adoptada. Por tanto, si se supone que la conexión es en estrella, la potencia que consume cada resistencia es:

$$P_R = \frac{P}{3} = \frac{U_F^2}{R}$$

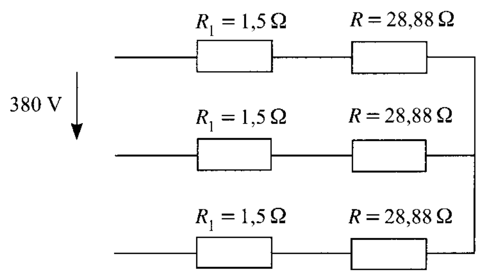


Luego, el valor de la resistencia de cada fase es:

$$R = \frac{3U_F^2}{P} = \frac{3\left(\frac{380}{\sqrt{3}}\right)^2}{5.000} = 28{,}88 \ \Omega$$

Por otra parte, al conectar el calefactor a través de cables de 1,5 Ω, la intensidad de línea demandada es:

$$I = \frac{U_F}{R + R_C} = \frac{380/\sqrt{3}}{28{,}88 + 1{,}5} = 7{,}22 \text{ A}$$



La potencia consumida por el calefactor:

$$P = 3RI^2 = 3 \cdot 28{,}88 \cdot 7{,}22^2 = 4.516{,}4 \text{ W}$$

Y la potencia cedida por la red:

$$P_T = 3(R + R_C)I^2 = 33(28{,}88 + 1{,}5)7{,}22^2 = 4.751 \text{ W}$$

Si la carga se conecta en triángulo, el valor de cada resistencia será:

$$R_\Delta = \frac{3U_F^2}{P} = \frac{3(380)^2}{5.000} = 86{,}64\ \Omega$$

Pero, para calcular la intensidad de línea, la carga en triángulo se pueden transformar en su estrella equivalente, siendo el valor de cada resistencia:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} = 28{,}88\ \Omega$$

Y por lo tanto, las conclusiones son las mismas que suponiendo las resistencias conectadas en estrella.

.12. El circuito de la figura representa un sistema trifásico equilibrado y se conocen los siguientes datos:

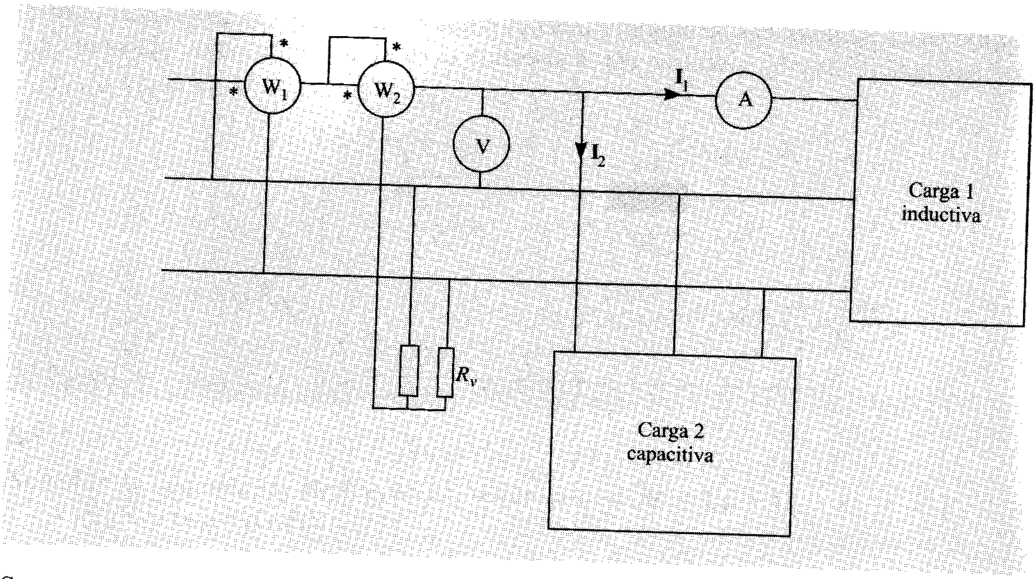
Carga 1: $P_1 = 10{,}56$ kW $\quad \cos\varphi_1 = 0{,}87$ inductivo

Carga 2: $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ capacitivo

Los aparatos de medida tienen las siguientes lecturas: amperímetro $A = 20\sqrt{3}$ A y vatímetro $W_2 = 5280$ W. El valor de la resistencia R_v es igual al valor de la resistencia de la bobina voltimétrica del vatímetro W_2. Se desea saber:

1. La lectura del voltímetro V.
2. La potencia de la carga 2.
3. La intensidad I_2 en valor eficaz.
4. La lectura del vatímetro W_1.

Nota: R_v es el valor de la resistencia de la bobina voltimétrica del vatímetro W_2.



SOLUCIÓN

1. La tensión medida por el voltímetro 1 se puede determinar a partir de los datos de Carga 1, pues

$$P_1 = \sqrt{3}UI_1 \cos\varphi_1$$

de donde:

$$U = \frac{P_1}{\sqrt{3}I_1\cos\varphi_1} = \frac{10{,}56 \cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3}\cdot 0{,}87} = 202{,}3\ \text{V}$$

2. El vatímetro 2 mide un tercio de la potencia consumida por el conjunto de ambas cargas, luego la potencia trifásica total es:

$$P_T = 3 \cdot W_2 = 3 \cdot 5.280 = 15.840\ \text{W}$$

Conocida la potencia total, la potencia consumida por la carga 2 es:

$$P_2 = P_T - P_1 = 15.840 - 10.560 = 5.280\ \text{W}$$

3. La corriente demandada por la carga 2:

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}U\cos\varphi_2} = \frac{5.280}{\sqrt{3}\cdot 202{,}3\cdot 0{,}8} = 18{,}83\ \text{A}$$

4. Por último, la medida del vatímetro 1 es proporcional a la potencia reactiva total:

$$W_1 = \frac{Q_T}{\sqrt{3}}$$

Pero la potencia reactiva total es la suma de las potencias reactivas de cada carga, teniendo en cuenta el carácter de cada una (inductivo o capacitivo).

$$Q_T = Q_1 - Q_2 = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 - P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = 10.560 \cdot 0{,}567 - 5.280 \cdot 0{,}75 = 2.024{,}6\ \text{VAr}$$

Por tanto:

$$W_1 = \frac{2.024{,}6}{\sqrt{3}} = 1.169\ \text{W}$$

.13. Un sistema trifásico equilibrado está formado por una carga unida por una línea de impedancia $\mathbf{Z}_L = 0{,}212 + j \cdot 1{,}041\ \Omega$ por fase a una fuente trifásica de tensiones equilibradas de secuencia directa y frecuencia 50 Hz. La carga consiste en tres impedancias iguales, de valor $\mathbf{Z} = 21 + j \cdot 15{,}6\ \Omega$ conectadas en triángulo. Si el valor eficaz de la tensión de línea en bornes de la carga trifásica es de 360 V calcúlese:

1. Valor eficaz de las corrientes de línea y de fase consumidas por la carga.

2. Potencias activa y reactiva consumidas por la carga.

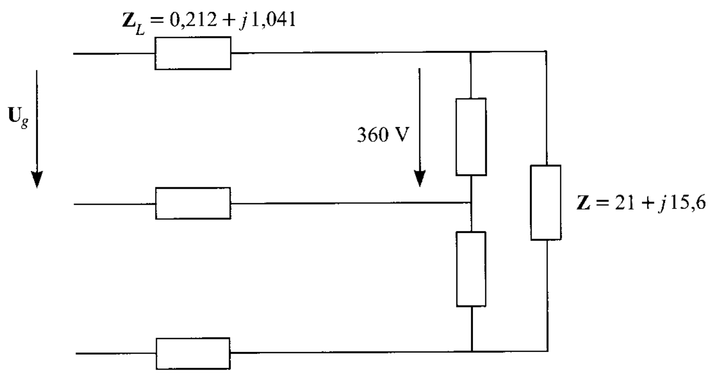
3. Valor eficaz de la tensión de línea de la fuente trifásica de tensiones.

4. Potencias activa y reactiva generadas por la fuente trifásica.

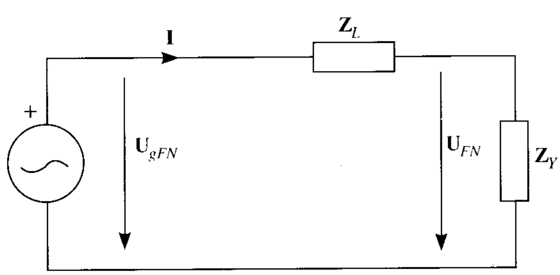
5. Capacidad por fase de la batería de condensadores que es necesario conectar en triángulo, en paralelo con la carga, para que el factor de potencia del conjunto condensador-carga sea de 0,9 capacitivo.

SOLUCIÓN

1. El esquema del circuito viene dado en la siguiente figura:



De ella se deduce el equivalente monofásico fase-neutro, que se representa a continuación.



2. El valor de la impedancia $\mathbf{Z}_Y$ del equivalente es un tercio de la impedancia $\mathbf{Z}$. Si se toma el valor de la tensión monofásica en la carga como origen de ángulos, la corriente de línea es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}_{FN}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{360/\sqrt{3}}{\dfrac{21 + j15{,}6}{3}} = 19{,}13 - j14{,}21\ \text{A} = 23{,}83\underline{/-36{,}61^\circ}\ \text{A}$$

La corriente de fase en la carga en triángulo es $\sqrt{3}$ veces menor. Luego, los valores eficaces de las corrientes de línea y de fase son:

$$I = 23{,}83 \text{ A}$$

$$I_F = I/\sqrt{3} = 13{,}76 \text{ A}$$

Las potencias activa y reactiva consumidas por la carga son:

$$P = 3RI_F^2 = 3 \cdot 21 \cdot 13{,}76^2 = 11.930 \text{ W}$$

$$Q = 3XI_F^2 = 3 \cdot 15{,}6 \cdot 13{,}76^2 = 8.861 \text{ VAr}$$

3. La tensión fase-neutro en el generador, se puede calcular aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito monofásico equivalente dibujado en el primer apartado:

$$\mathbf{U}_{gFN} = \mathbf{Z}_L\mathbf{I} + \mathbf{U}_{FN} = (0{,}212 + j1{,}041)(19{,}13 - j14{,}21) + \frac{360}{\sqrt{3}} = 226{,}7 + j16{,}9 \text{ V} = 227{,}3\angle 4{,}3°$$

Y la tensión de línea en el generador será:

$$U_g = \sqrt{3}U_{gFN} = \sqrt{3} \cdot 227{,}3 = 393{,}7 \text{ V}$$

4. Las potencias activa y reactiva generadas por la fuente serán iguales a las consumidas por la línea y la carga:

$$P_g = \Delta P_L + P = 3R_L \cdot I^2 + P = 3 \cdot 0{,}121 \cdot 23{,}83^2 + 11.930 = 12136 \text{ W}$$

$$Q_g = \Delta Q_L + Q = 3X_L \cdot I^2 + Q = 3 \cdot 1{,}041 \cdot 23{,}83^2 + 8.861 = 10.634 \text{ VAr}$$

5. La capacidad de la batería de condensadores en triángulo se calcula mediante la siguiente expresión:

$$C_\Delta = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2} = \frac{11.930(0{,}74 + 0{,}48)}{3 \cdot 100\pi \cdot 360^2} = 119{,}2\ \mu\text{F}$$

ya que:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = 0{,}74$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\operatorname{tg}(\arccos(0{,}9)) = -0{,}48$$

(el signo negativo se debe al carácter capacitivo que debe tener el conjunto después de conectar la batería de condensadores).

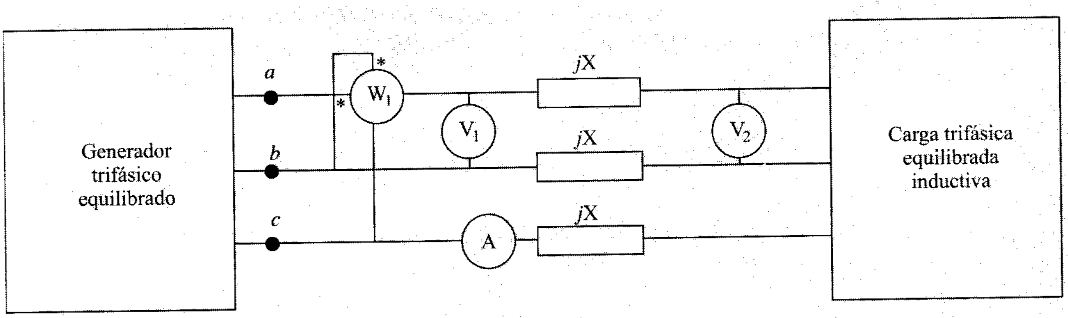
3.14. En el sistema trifásico equilibrado de secuencia directa indicado en la figura, las lecturas de los aparatos de medida son respectivamente $V_1 = 2$ kV; $V_2 = 1{,}8$ kV; $A = 40$ A; $W = 40$ kW. Determinar:

a) Factor de potencia de la carga e impedancia de carga si está conectada en triángulo.

b) Reactancia X de la línea.

c) Capacidad por fase de la batería de condensadores, en triángulo, que conectada en paralelo con la carga haga que el conjunto carga-condensadores tenga un factor de potencia unidad ($f = 50$ Hz).

d) Lectura de los aparatos de medida después de colocar la batería de condensadores si se mantiene la tensión V_1 del generador.



SOLUCIÓN

a) Para hallar el factor de potencia en la carga se necesita conocer la potencia activa que consume, pues:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3}IU_2}$$

La potencia consumida por la carga se obtiene a partir de la medida del vatímetro. Ésta es proporcional a la potencia reactiva del conjunto formado por la línea y la carga, que coincide con la potencia reactiva cedida por el generador:

$$Q_g = \sqrt{3}\cdot W_1 = \sqrt{3}\cdot 40\cdot 10^3 \text{ VAr}$$

$$Q_g = \sqrt{3}\cdot U_1 I \operatorname{sen}\varphi_g \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\varphi_g = \frac{Q_g}{\sqrt{3}\cdot U_1 I} = \frac{\sqrt{3}\cdot 40\cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 40} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\varphi_g = 30^\circ$, y la potencia activa cedida por el generador es:

$$P_g = \sqrt{3}U_1 I\cos\varphi_g = \sqrt{3}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 120\cdot 10^3 \text{ W}$$

Pero como la línea es puramente inductiva, la potencia consumida por la carga es igual a la potencia cedida por el generador.

Luego el factor de potencia de la carga es:

$$\cos\varphi = \frac{120\cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 1{,}8\cdot 10^3\cdot 40} = 0{,}96$$

La impedancia de carga es:

$$Z = \frac{U_2}{I_F} = \frac{1.800}{40/\sqrt{3}} = 78\ \Omega \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Z} = 78(0{,}96 + j0{,}28) = 74{,}88 + j21{,}84\ \Omega$$

b) La potencia reactiva consumida por la carga es:

$$Q = P\cdot\operatorname{tg}\varphi = 120\cdot 10^3\cdot 0{,}29 = 34{,}8 \text{ kVAr}$$

Y la potencia reactiva consumida por la línea será la diferencia entre la generada por el generador y la consumida por la carga:

$$Q_1 = Q_g - Q = \sqrt{3}\cdot 40 - 34{,}8 = 34{,}5 \text{ kVAr}$$

$$Q_1 = 3XI^2 \quad\Rightarrow\quad X = \frac{Q_1}{3I^2} = \frac{34{,}5\cdot 10^3}{3\cdot 40^2} = 7{,}18\ \Omega$$

c) Para que el factor de potencia del conjunto carga-condensadores sea la unidad, éstos de- ben ceder toda la potencia reactiva que consume la carga, luego la capacidad de cada con- sador será:

$$C_\Delta = \frac{Q}{3\omega U_2^2} = \frac{34{,}5 \cdot 10^3}{3 \cdot 100\pi \cdot (1{,}8 \cdot 10^3)^2} = 11{,}3\ \mu\text{F}$$

De esta forma el conjunto carga-condensadores resulta puramente resistivo con una re- tencia por fase igual a $R = 74{,}88\ \Omega$.

d) Si pasamos a la estrella equivalente, la resistencia será $R_Y = 24{,}96\ \Omega$.
Para hallar la nueva intensidad de línea se toma el equivalente fase-neutro:

$$I' = \frac{U_1/\sqrt{3}}{|R_Y + jX|} = \frac{2 \cdot 10^3/\sqrt{3}}{|24{,}96 + j7{,}18|} = 44{,}46\ \text{A} \equiv \text{medida del amperímetro A}$$

La tensión fase-neutro en la carga es:

$$U'_{2FN} = I'R_Y = 44{,}46 \cdot 24{,}96 = 1.109{,}72\ \text{V}$$

Y la tensión de línea:

$$U'_2 = \sqrt{3}U'_{2FN} = \sqrt{3} \cdot 1.109{,}72 = 1.922{,}09\ \text{V} \equiv \text{medida del voltímetro } V_2$$

Por último, la medida del vatímetro W_1 es proporcional a la potencia reactiva de la lí- por ser el conjunto carga-condensadores puramente resistivo:

$$Q'_1 = 3XI'^2 = 3 \cdot 7{,}18 \cdot 44{,}46^2 = 42.577{,}94\ \text{VAr}$$

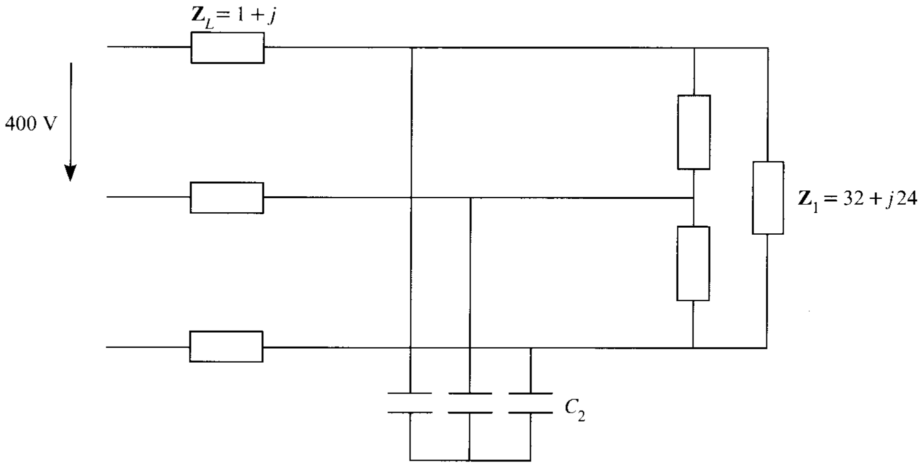
$$W_1 = \frac{Q'_1}{\sqrt{3}} = \frac{42.577{,}94}{\sqrt{3}} = 24.582{,}4\ W$$

3.15. Tres conductores, cada uno con una impedancia $\mathbf{Z}_L = 1 + j\ \Omega$, se utilizan para alimen- dos cargas trifásicas, conectadas en paralelo. El extremo inicial de los conductores, s conecta a una fuente trifásica de tensiones equilibradas y de secuencia directa de 400 (tensión de línea) a una frecuencia de 50 Hz. El extremo final de los conductores es conectado al conjunto en paralelo de las dos cargas. Una de las cargas está conectada triángulo y su impedancia por fase vale $\mathbf{Z}_1 = 32 + j24\ \Omega$. La segunda carga es una estre equilibrada, de neutro aislado, formada por condensadores de un valor por fase de C_2, que el conjunto de las dos cargas presenta factor de potencia unidad.

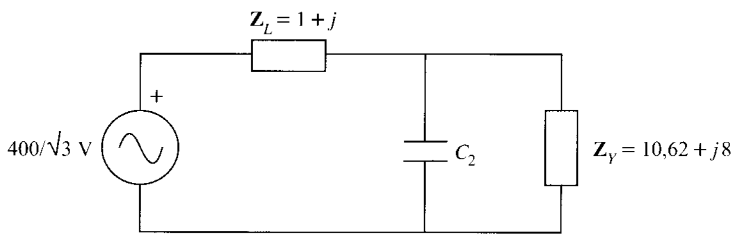
1. Calcúlese el valor de C_2 en μF.
2. Calcúlense las tensiones de línea y de fase en cada una de las cargas, y las intensi- des de línea en los conductores de alimentación, en módulo y argumento.
3. Calcúlense las potencias, activa y reactiva absorbidas por la carga 1 y cedidas por fuente de tensión.

Solución

1. El esquema de las cargas es el representado a continuación:



De este circuito, el equivalente monofásico fase-neutro será:



La impedancia equivalente de la carga 1 es la tercera parte del valor de la original, conectada en triángulo, puesto que es su impedancia equivalente en estrella.

Una de las formas posibles de obtener el valor de C_2, es a partir de la admitancia equivalente del condensador y $\mathbf{Z}_Y$, $\mathbf{Y}_p$, que será:

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_Y + j\omega C = 0,06 + j(\omega C - 0,045)$$

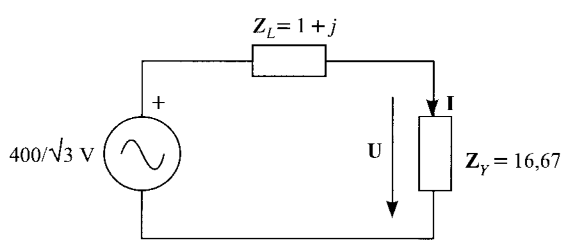
Donde:

$$\mathbf{Y}_Y = 1/\mathbf{Z}_Y = 0,06 - j0,045$$

Puesto que el sistema es puramente resistivo, la parte imaginaria de la admitancia equivalente tiene que ser cero, por lo que:

$$\omega C - 0,045 = 0, \text{ esto es; } C = 0,045/100\pi = 0,14 \text{ mF}$$

2. A fin de simplificar el análisis, se sustituirá el paralelo de la impedancia $\mathbf{Z}_1$ con el condensador C_2 por su impedancia equivalente, puramente resistiva, y cuyo valor será $\mathbf{Z}_p = 1/0,06 = 16,67\ \Omega$. El circuito monofásico fase-neutro será el siguiente:



La corriente que circulará por la carga será:

$$\mathbf{I} = \frac{400/\sqrt{3}}{16{,}67 + j} = 13{,}05\underline{/-3{,}24^{\circ}}$$

la tensión fase neutro en la carga:

$$U_{FN} = 13{,}05 \cdot 16{,}67 = 217{,}54 \text{ V}$$

que será la tensión aplicada a los condensadores. La tensión de línea será $U = \sqrt{3} \cdot 217{,}54 = 376{,}8$ V. Esta tensión será también la tensión de fase de la carga $\mathbf{Z}_2$.

Los fasores de tensión de fase y de línea serán:

$$\mathbf{U}_{FN} = 217{,}43\underline{/-3{,}24^{\circ}} \qquad \mathbf{U}_{FF} = 376{,}8\underline{/-3{,}24^{\circ} + 30^{\circ}}$$

3. La potencia activa consumida por la impedancia $\mathbf{Z}_1$ será:

$$P_1 = 3 \cdot I^2 \cdot R = 3 \cdot 13{,}05^2 \cdot 16{,}67 = 85.815 \text{ W}$$

En tanto que la potencia reactiva consumida por el condensador:

$$Q_2 = -3\omega C U_{FN}^2 = -100\pi\, 0{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot 217{,}43^2 = -6.237{,}9 \text{ VAr}$$

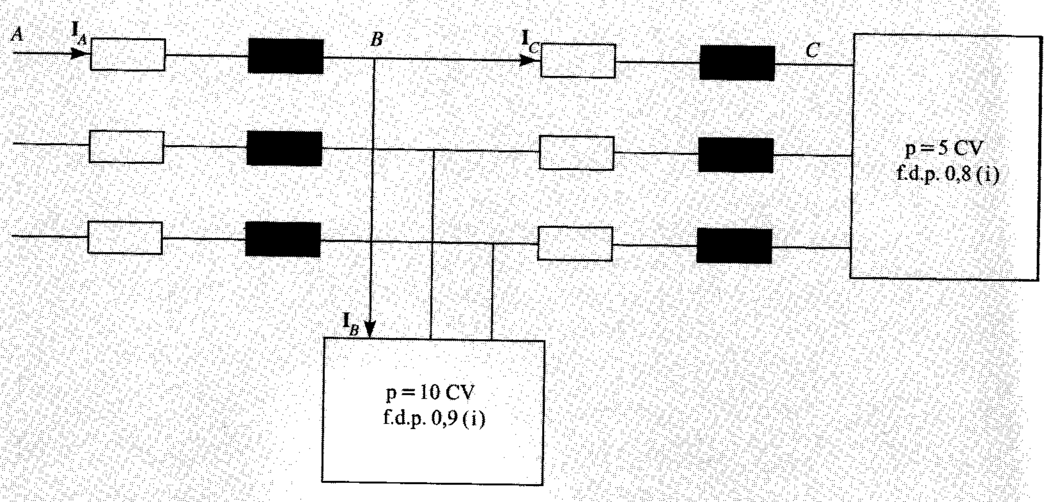
En cuanto a la potencia reactiva consumida por la carga 1, será igual a la generada por los condensadores, esto es, $Q_1 = -Q_2 = 6237{,}9$ VAr.

3.16. En el circuito de la figura, la distancia de A a B es de 2 km y la distancia de B a C es de 3 km. La línea tiene en todo su recorrido una sección de 95 mm², con una resistividad de 0,018 Ω·mm²/m y una reactancia de 0,25 Ω/km. Si se conoce que la tensión de línea en C es de 380 V, calcúlese:

a) Tensiones de línea en A y en B.

b) Valores eficaces de las intensidades $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$, e $\mathbf{I}_C$.

c) Capacidad de cada uno de los condensadores que sería necesario conectar en triángulo en el punto A para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad.



Nota: 1 CV = 736 W. Fecuencia $f = 50$ Hz.

SOLUCIÓN

a) Se calcula en primer lugar la resistencia y reactancia de cada uno de los tramos:

$$R_{AB} = \rho \frac{l_{AB}}{s} = 0{,}018 \frac{2.000}{95} = 0{,}38 \ \Omega$$

$$R_{BC} = \rho \frac{l_{BC}}{s} = 0{,}018 \frac{3.000}{95} = 0{,}57 \ \Omega$$

$$X_{AB} = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5 \ \Omega$$

$$X_{BC} = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75 \ \Omega$$

Luego:

$$\mathbf{Z}_{AB} = 0{,}38 + j0{,}5$$

$$\mathbf{Z}_{BC} = 0{,}57 + j0{,}75$$

Por otra parte, se puede calcular la intensidad de línea en C, a partir de la expresión de la potencia activa, teniendo en cuenta que 1 CV equivale a 736 W:

$$I_C = \frac{P_C}{\sqrt{3} U_C \cos\varphi} = \frac{5 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}8} = 7 \text{ A}$$

Si se toma la tensión de fase en C como origen de ángulos,

$$\mathbf{U}_{CF} = \frac{380}{\sqrt{3}} \underline{/0^\circ}$$

el factor de potencia de la carga permite conocer la fase de la intensidad de línea en C:

$$\cos\varphi = 0{,}8(i) \quad \Rightarrow \quad \varphi = -36{,}87^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = 7\underline{/-36{,}87^\circ} \text{ A} = 5{,}6 - \text{j}4{,}2 \text{ A}$$

Conocidas la intensidad y la impedancia de la línea, se puede hallar la tensión fase-neutro en B:

$$\mathbf{U}_{BFN} = \mathbf{U}_{CFN} + \mathbf{Z}_{BC} \cdot \mathbf{I}_C = \frac{380}{\sqrt{3}} + (0{,}57 + j0{,}75) \cdot (5{,}6 - j4{,}2) = 225{,}74 + j1{,}81 = 225{,}74\underline{/0{,}46^\circ} \text{ V}$$

Y la tensión de línea en B *es*:

$$U_B = \sqrt{3} \cdot 225{,}74 = 391 \text{ V}$$

Conocida la tensión en B se calcula la corriente de línea en B:

$$I_B = \frac{P_B}{\sqrt{3} U_B \cos\varphi} = \frac{10 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 391 \cdot 0{,}9} = 12{,}08 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = 12{,}08\underline{/0{,}46^\circ} - \arccos(0{,}9) = 12{,}08\underline{/-25{,}38^\circ} \text{ A} = 10{,}91 - j5{,}18 \text{ A}$$

A partir de las corrientes de línea en B y C se tiene la corriente de línea en A:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = (10{,}91 - j5{,}18) + (5{,}6 - j4{,}2) = 16{,}51 - j9{,}38 = 19\underline{/-29{,}59^\circ} \text{ A}$$

La tensión fase-neutro en A será:

$$\mathbf{U}_{AFN} = \mathbf{U}_{BFN} + \mathbf{Z}_{AB} \cdot \mathbf{I}_A = (225{,}74 + j1{,}81) + (0{,}38 + j0{,}5) \cdot (16{,}51 - j9{,}38) =$$
$$= 236{,}70 + j6{,}50 = 236{,}79\underline{/1{,}57^\circ} \text{ V}$$

Y, por tanto, la tensión de línea en A:

$$U_A = \sqrt{3} \cdot 236{,}79 = 410 \text{ V}$$

Los valores eficaces de las intensidades en A, B y C son $I_A = 19$ A, $I_B = 12{,}08$ A $I_C = 7$ A.

Para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad, los condensadores deben ced toda la potencia reactiva consumida por el conjunto de las dos cargas y de la línea. Dic potencia reactiva se puede calcular a partir de la potencia aparente en el punto A. La poten aparente de cada fase en el punto A es:

$$\mathbf{S}_{AF} = \mathbf{U}_{AF} \cdot \mathbf{I}_A^* = 236{,}79\underline{/1{,}57^\circ} \cdot 19\underline{/29{,}59^\circ} = 4.499\underline{/31{,}16^\circ} \text{ VA} = 3.849{,}91 + j2.327{,}92 \text{ VA}$$

Luego, la potencia reactiva cedida por cada condensador debe ser $Q = 2.327{,}92$ VAr. Como dicha potencia tiene por expresión:

$$Q = \omega C_\Delta U_A^2$$

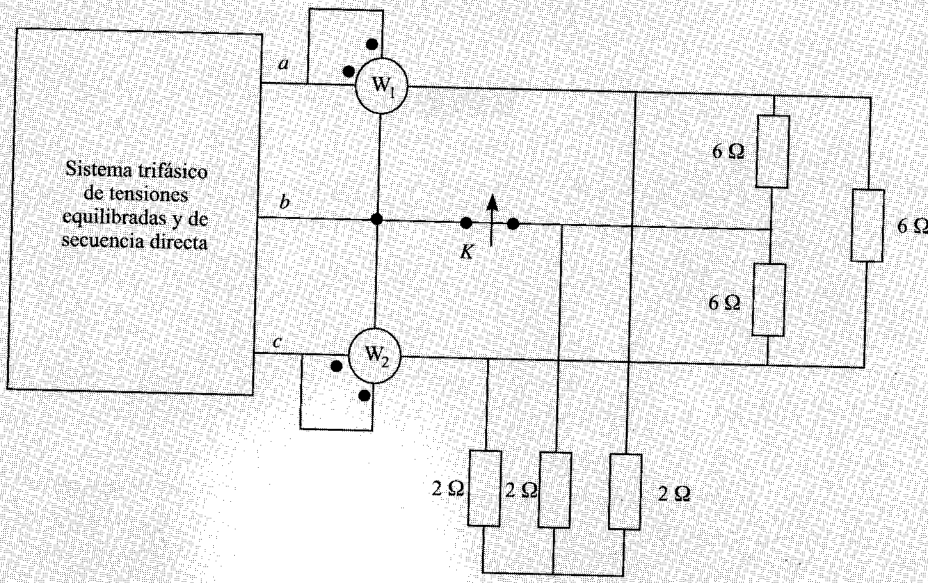
La capacidad de cada condensador debe ser:

$$C_\Delta = \frac{Q}{\omega U_A^2} = \frac{2.327{,}92}{100\pi \cdot 410^2} = 4{,}41 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 44{,}1 \ \mu\text{F}$$

3.17. En el sistema trifásico equilibrado de secuencia directa de la figura se pide:

a) Lectura del vatímetro W_2 y la tensión de alimentación si la lectura del vatímetro W_1 es de 150 W.

b) Lectura de los vatímetros cuando se abre el interruptor K y se mantienen las tensiones de alimentación.



SOLUCIÓN

a) Por la conexión de los dos vatímetros, se tiene:

$$W_1 + W_2 = P$$

$$W_2 - W_1 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Como el conjunto de las dos cargas es puramente resistivo, la potencia reactiva es nula y de la segunda expresión se deduce el valor de W_2, $W_2 = W_1 = 150$ W.

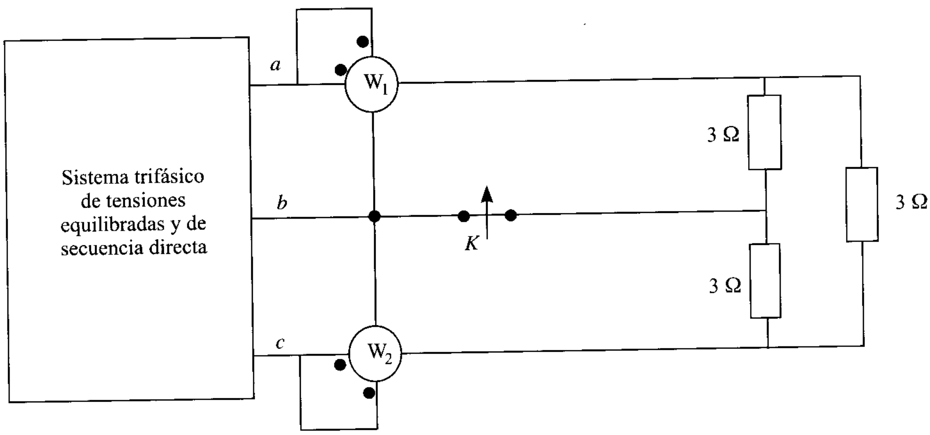
Entrando en la primera expresión se tiene el valor de la potencia activa:

$$P = 2 \cdot 150 = 300 \text{ W}$$

Una vez conocido este valor, habrá que hallar la resistencia equivalente de las dos cargas en paralelo con el fin de obtener la tensión. En primer lugar se halla la resistencia equivalente al triángulo de la carga de 2 Ω por fase, que será $R_{1\Delta} = 3 \cdot 2\ \Omega$. A continuación se obtiene la resistencia resultante del paralelo de las dos cargas:

$$R_{eq} = \frac{R_{1\Delta} \cdot R_{2\Delta}}{R_{1\Delta} + R_{2\Delta}} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3\ \Omega$$

y el circuito resultante es el de la figura.



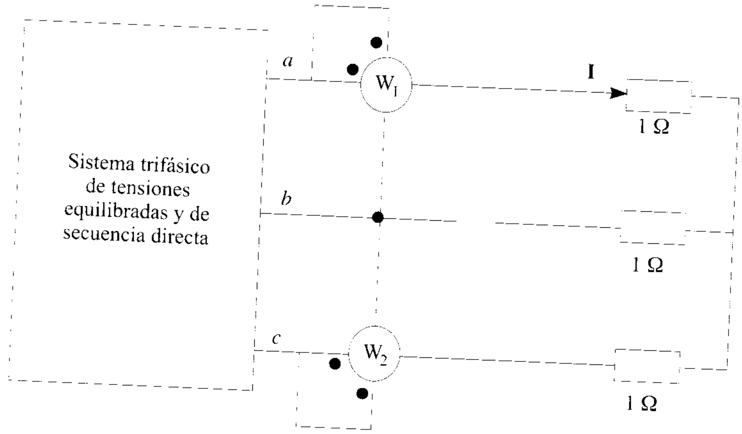
La potencia consumida por el conjunto de ambas cargas tiene por expresión:

$$P = 3\,\frac{U^2}{R_{eq}}$$

Y la tensión de línea:

$$U = \sqrt{\frac{P \cdot R_{eq}}{3}} = \sqrt{\frac{300 \cdot 3}{3}} = 10\sqrt{3} \text{ V}$$

b) Cuando se abre el interruptor, el circuito queda como se muestra a continuación. En la figura se ha sustituido el triángulo por su estrella equivalente:



La intensidad I vale:

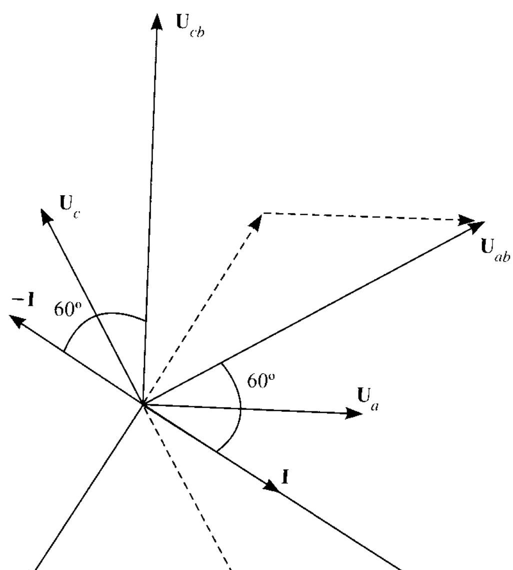
$$I = \frac{U_{ac}}{2R} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{A}$$

De la figura se deduce que las medidas de ambos vatímetros son, respectivamente:

$$W_1 = UI\cos(\mathbf{U}_{ab}, \mathbf{I}_a) = UI\cos(\mathbf{U}_{ab}, \mathbf{I})$$

$$W_2 = UI\cos(\mathbf{U}_{cb}, \mathbf{I}_c) = UI\cos(\mathbf{U}_{cb}, -\mathbf{I})$$

Se necesita conocer el ángulo formado por $\mathbf{I}$ y $\mathbf{U}_{ab}$ en el primer caso y el formado por $-\mathbf{I}$ y $\mathbf{U}_{cb}$ en el segundo, para lo cual se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades:



Para que aparezcan las tensiones $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_b$ y $\mathbf{U}_c$, es necesario suponer que las tensiones de la alimentación están conectadas en estrella.

Se puede observar que los dos ángulos buscados son iguales entre sí y con un valor de 60°, por lo que la medida de ambos vatímetros es:

$$W_1 = W_2 = 5\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ) = 75\ \text{W}$$

El siguiente circuito trifásico es totalmente equilibrado y el amperímetro indica:

$$\frac{10}{\sqrt{3}}\ \text{A}$$

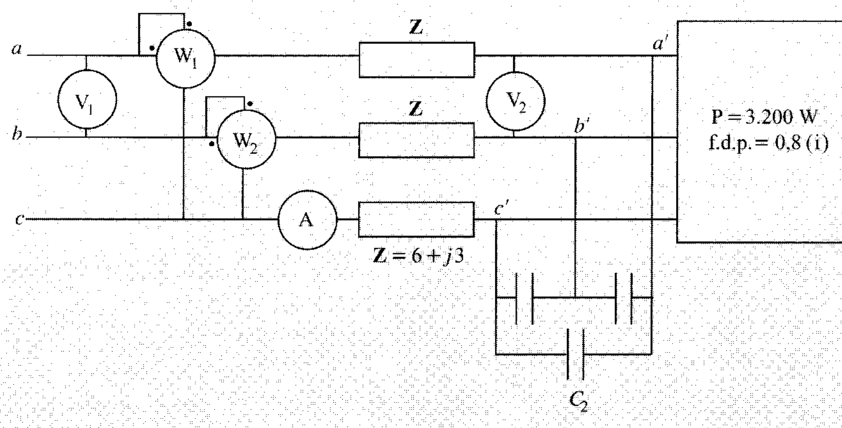
Se pide:

a) Potencia reactiva necesaria de los condensadores conectados en $a'b'c'$ para que el sistema total conectado en abc tenga un factor de potencia unidad.

b) Indicación del voltímetro V_1 y de los vatímetros W_1 y W_2.

c) Indicación del voltímetro V_2.

d) Capacidad por fase de los condensadores conectados en triángulo.



Nota: frecuencia $f = 50$ Hz.

SOLUCIÓN

a) La potencia reactiva consumida por la carga es:

$$Q = P \cdot \text{tg}\,\varphi = 3.200 \cdot 0{,}75 = 2.400\ \text{VAr}$$

La potencia reactiva consumida por la línea es:

$$Q_L = 3 \cdot X_L \cdot I^2 = 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 300\ \text{VAr}$$

Luego los condensadores deben ceder la suma de ambas:

$$Q_C = Q + Q_L = 2.400 + 300 = 2.700\ \text{VAr}$$

b) La potencia activa consumida por la línea es:

$$P_L = 3R_L I^2 = 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 600\ \text{W}$$

Entonces:

Potencia activa total $\quad P_T = P + P_L = 3.200 + 600 = 3.800$ W

Potencia reactiva total $\quad Q_T = Q + Q_L - Q_C = 2.400 + 300 - 2.700 = 0$ VAr

Como:

$$W_1 + W_2 = P \quad \text{y} \quad W_1 - W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

se tiene que $W_1 = W_2 = P_T/2 = 1.900$ W.

La tensión de línea en *abc* es:

$$U_1 = \frac{P_T}{\sqrt{3}I\cos\varphi} = \frac{3.800}{\sqrt{3}\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}\cdot 1} = 380 \text{ V}$$

c) Para obtener la tensión de línea en $a'b'c'$ se calcula la potencia aparente del conjunto carga-condensadores:

$$S = \sqrt{P^2 + (Q - Q_C)^2} = \sqrt{3.200^2 + (2.400 - 2.700)^2} = 3.214 \text{ VA}$$

$$S = \sqrt{3}IU_2 \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{S}{\sqrt{3}I} = \frac{3.214}{\sqrt{3}\,\frac{10}{\sqrt{3}}} = 321{,}4 \text{ V}$$

d) La capacidad por fase de los condensadores es:

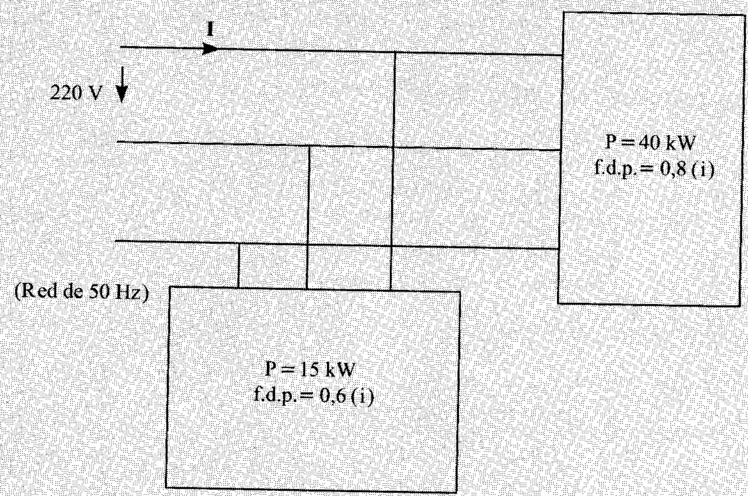
$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3\omega U_2^2} = \frac{2.700}{3\cdot 100\pi\cdot 321{,}4^2} = 27{,}73\ \mu\text{F}$$

3.19. El circuito trifásico de la figura es totalmente equilibrado. Determinar:

a) Intensidad I absorbida por la red.

b) Factor de potencia total.

c) Capacidad por fase de la batería de condensadores conectados en estrella para que la intensidad I sea 0,9 veces la calculada en el Apartado a).



SOLUCIÓN

a) Se calcula en primer lugar la potencia aparente del conjunto de las dos cargas:

$$S = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2} = \sqrt{(15 + 40)^2 + (30 + 20)^2} = 74{,}33 \text{ kVA}$$

Y, a partir de ella, se obtiene la intensidad de línea:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}U} = \frac{74{,}33\cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 220} = 195 \text{ A}$$

b) El factor de potencia total es:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{55}{74{,}33} = 0{,}74$$

c) Sin la batería de condensadores la potencia activa se puede expresar como:

$$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

Después de colocar la batería de condensadores, la potencia sigue siendo la misma, pero cambia la intensidad y el factor de potencia:

$$P = \sqrt{3} UI' \cos \varphi'$$

Igualando ambas expresiones podemos calcular el nuevo factor de potencia:

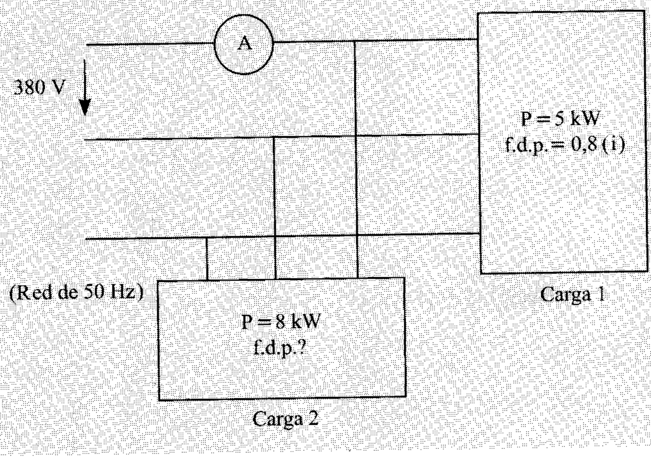
$$\cos \varphi' = \frac{I}{I'} \cos \varphi = \frac{I}{0{,}9 \cdot I} \cos \varphi = 0{,}822$$

Luego la capacidad de la batería de condensadores será:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{3\omega\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{55 \cdot 10^3 (0{,}91 - 0{,}692)}{100\pi \cdot 220^2} = 0{,}78\ \mu\text{F}$$

3.20. El circuito de la figura está formado por dos cargas trifásicas equilibradas en paralelo. La carga 1 consume 5 kW con un factor de potencia $\cos \varphi_1 = 0{,}8$ y la carga 2 una potencia de 8 kW. La tensión de línea es de 380 V, la frecuencia de 50 Hz y el amperímetro señala 22 A.

1. Calcular el factor de potencia de la carga 2, $\cos \varphi_2$.
2. La carga 1 está formada por tres impedancias $\mathbf{Z}_1$ conectadas en estrella, mientras que la carga 2 lo está por tres impedancias $\mathbf{Z}_2$ conectadas en triángulo. Calcular los valores de $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.
3. Calcular la batería de condensadores conectados en triángulo necesaria para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad.
4. Obtener el valor eficaz de las corrientes de fase de cada una de las cargas.



Solución

1. La potencia aparente suministrada al conjunto de ambas cargas es:

$$S = \sqrt{3} UI = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 22 = 8.360\sqrt{3}\ \text{VA}$$

Y la potencia activa total consumida por las cargas:

$$P = P_1 + P_2 = 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3 = 13 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Luego, la potencia reactiva total consumida por las dos cargas es:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(8.360\sqrt{3})^2 - 13.000^2} = \pm 6.377{,}21 \text{ VAr}$$

La solución negativa no es posible, pues dicha solución indicaría un sistema capaciti[illegible] por tanto, no se podría resolver el apartado tercero de compensación del factor de pot[illegible] global. Luego $Q = 6.377{,}21$ VAr.

Por otro lado la potencia reactiva consumida por la carga 1 es:

$$Q_1 = P_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}75 = 3.750 \text{ VAr}$$

Y la potencia reactiva consumida por la carga 2 es:

$$Q_2 = Q - Q_1 = 6.377{,}21 - 3.750 = 2.627{,}21 \text{ VAr}$$

Siendo el factor de potencia de la carga 2:

$$\cos \varphi_2 = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2.627{,}21}{8.000}\right)\right) = 0{,}95 \; (i)$$

2. Cálculo de $\mathbf{Z}_1$:

La intensidad de línea en la carga 1:

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}U\cos\varphi_1} = \frac{5 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}8} = 9{,}5 \text{ A}$$

El módulo de la impedancia $\mathbf{Z}_1$ será:

$$Z_1 = \frac{U_{1F}}{I_1} = \frac{380/\sqrt{3}}{9{,}5} = 23{,}09 \; \Omega$$

Y la impedancia compleja $\mathbf{Z}_1$:

$$\mathbf{Z}_1 = 23{,}09(0{,}8 + j0{,}6) = 18{,}47 + j13{,}85 = 23{,}09\underline{/36{,}87^\circ} \; \Omega$$

Cálculo de $\mathbf{Z}_2$:

La intensidad de línea en la carga 2:

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}U\cos\varphi_2} = \frac{8 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}95} = 12{,}79 \text{ A}$$

Por estar dicha carga conectada en triángulo, el módulo de la impedancia es:

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_{2F}} = \frac{380}{12{,}79/\sqrt{3}} = 51{,}49 \; \Omega$$

Y finalmente la impedancia compleja $\mathbf{Z}_2$:

$$\mathbf{Z}_2 = 51{,}49(0{,}95 + j0.31) = 48{,}92 + j15{,}96 = 51{,}49\underline{/18{,}19^\circ} \; \Omega$$

3. Para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad, la batería de condensadores conectada en triángulo debe ceder una potencia reactiva igual a la consumida por ambas cargas, que coincide con la potencia reactiva calculada en el primer apartado, $Q = 6377{,}21$ VAr. Por lo tanto, la capacidad de cada condensador será:

$$C_\Delta = \frac{Q}{3\omega U^2} = \frac{6.377{,}21}{3 \cdot 100\pi \cdot 380^2} = 46{,}86\ \mu\text{F}$$

4. La corriente de fase de la carga 1 coincide con la corriente de línea por estar la carga en estrella. En cambio la carga 2 está conectada en triángulo y la corriente de fase será $\sqrt{3}$ veces menor que la de línea:

$$I_{1F} = 9{,}5\ \text{A}$$

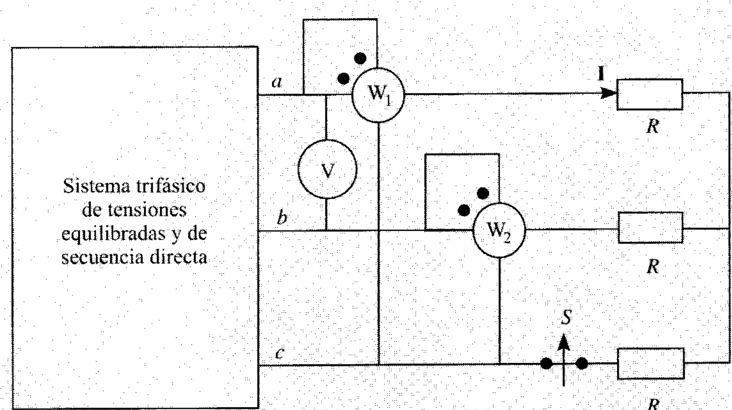
$$I_{2F} = \frac{I_2}{\sqrt{3}} = \frac{12{,}79}{\sqrt{3}} = 7{,}38\ \text{A}$$

2· El sistema trifásico de la figura es de secuencia directa, siendo la lectura del voltímetro 200 V y la del vatímetro W_1 1.000 W. Se pide:

a) Determinar la lectura del vatímetro W_2 y el valor de la resistencia R si el interruptor S está cerrado.

b) Valor de las corrientes circulantes cuando el interruptor S está abierto.

c) Determinar las nuevas lecturas de los vatímetros W_1 y W_2 cuando el interruptor S está abierto.



SOLUCIÓN

a) Por tratarse de una carga puramente resistiva, la potencia reactiva es nula. Dicha potencia se puede hallar a partir de la medida de los dos vatímetros, cuando el sistema está equilibrado, mediante la expresión:

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) = 0\ \text{W}$$

de donde se tiene que $W_1 = W_2 = 1.000$ W.

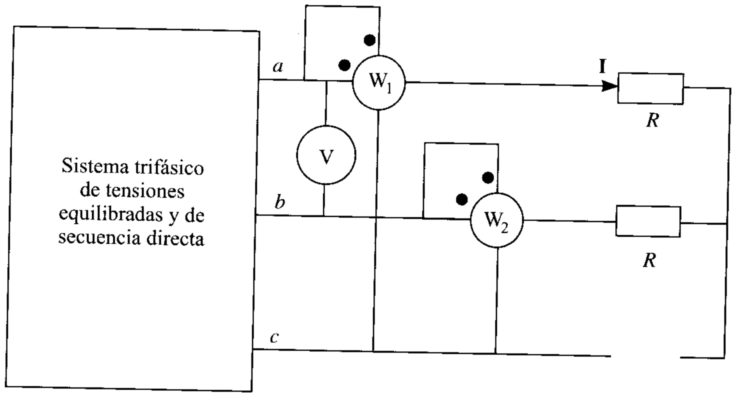
Por otra parte la potencia activa se calcula como la suma de la medida de ambos vatímetros:

$$P = W_1 + W_2 = 1.000 + 1.000 = 2.000\ \text{W}$$

Como $P = 3\,\dfrac{U_F^2}{R}$, conocidas P y U_F tenemos el valor de R:

$$R = 3\,\frac{U_F^2}{P} = 3\,\frac{(220/\sqrt{3})^2}{2.000} = 20\ \Omega$$

b) Cuando el interruptor S está abierto, el circuito resultante es desequilibrado y hay aplicar los métodos generales de alterna:



De la simple observación del circuito se advierte que

$$\mathbf{I}_b = -\mathbf{I}_a$$

$$\mathbf{I}_c = 0$$

La intensidad $\mathbf{I}_a$ se calcula como:

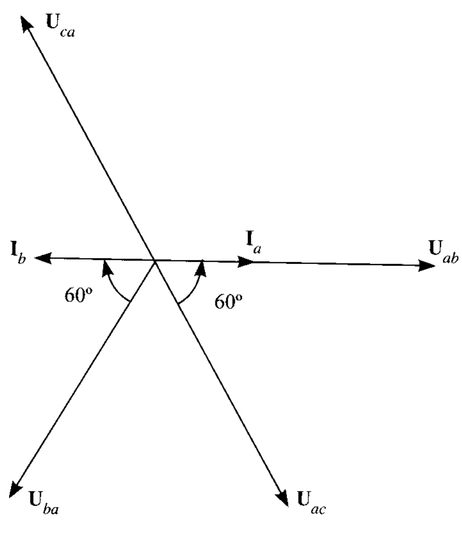
$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_{ab}}{2R} = \frac{200}{2 \cdot 20} = 5 \text{ A}$$

c) Las lecturas de ambos vatímetros vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$W_1 = U_{ac} I_a \cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a)$$

$$W_2 = U_{bc} I_b \cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b)$$

Hay que determinar, por tanto, el ángulo entre la tensión y la corriente en los dos casos, lo cual se determina a partir del diagrama vectorial de la figura.



De la figura se tiene que:

$$\cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b) = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

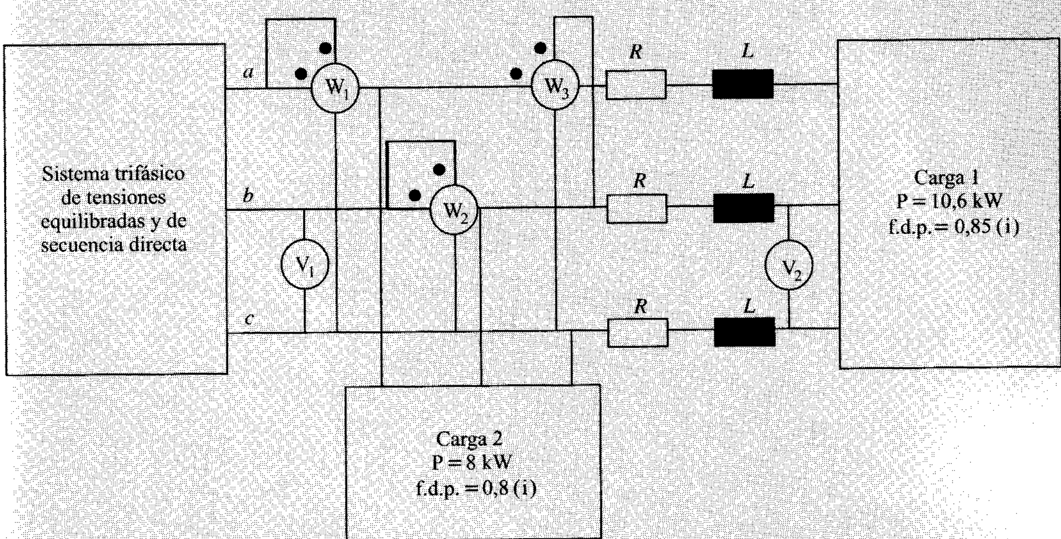
$$W_1 = 200 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ W}$$

$$W_2 = 200 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ W}$$

22. En la figura se representa un sistema trifásico equilibrado en tensiones y en cargas. La carga 1 se alimenta a través de una línea de resistencia $R = 0{,}5\ \Omega$ y una inductancia $L = 10/\pi$ mH. El voltímetro V_2 mide 360 V. Se pide:

1. Lectura de los vatímetros W_1, W_2 y W_3.

2. Lectura del voltímetro V_1 y $\cos\varphi$ del generador



Solución

1. Los vatímetros W_1 y W_2 están colocados según el método de los dos vatímetros de forma que permiten medir la potencia activa y reactiva del conjunto formado por ambas cargas y la línea, es decir, la potencia activa y reactiva entregadas por el generador. Luego:

$$W_1 + W_2 = P_g$$

$$W_1 - W_2 = \frac{Q_g}{\sqrt{3}}$$

Pero:

$$P_g = P_1 + P_2 + P_l$$

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_l$$

Donde:

$$P_l = 3RI_1^2 = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 20^2 = 600 \text{ W}$$

$$Q_l = 3\omega L I_1^2 = 3 \cdot 100\pi \frac{10}{\pi} \cdot 10^{-3} \cdot 20^2 = 1.200 \text{ VAr}$$

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}U_2 \cos\varphi_1} = \frac{10{,}6 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 360 \cdot 0{,}85} = 20 \text{ A}$$

Luego:

$$P_g = 10{,}6 + 8 + 0{,}6 = 19{,}2 \text{ kW}$$

$$Q_g = 10{,}6 \cdot \operatorname{tg}(\arccos(0{,}85)) + 8 \cdot \operatorname{tg}(\arccos(0{,}8)) + 1{,}2 = 6{,}57 + 6 + 1{,}2 = 13{,}77 \text{ kVA}$$

Por tanto, se tiene el sistema:

$$W_1 + W_2 = 19{,}2$$

$$W_1 - W_2 = \frac{13{,}77}{\sqrt{3}} = 7{,}95$$

cuya resolución da los valores $W_1 = 13{,}575$ kW y $W_2 = 5{,}625$ kW.

Por otra parte, el vatímetro W_3 mide $Q_g/\sqrt{3}$, luego $W_3 = 7{,}95$ kW.

2. La potencia aparente consumida por el conjunto línea-carga 1 es:

$$S_{1l} = \sqrt{P_{1l}^2 + Q_{1l}^2}$$

donde

$$P_{1l} = P_1 + P_l = 10{,}6 + 0{,}6 = 11{,}2 \text{ kW}$$

$$Q_{1l} = Q_1 + Q_l = 6{,}57 + 1{,}2 = 7{,}77 \text{ kVAr}$$

y por tanto

$$S_{1l} = \sqrt{11{,}2^2 + 7{,}77^2} = 13{,}63 \text{ kVA}$$

Por otra parte:

$$S_{1l} = \sqrt{3}U_1 I_1$$

por tanto

$$U_1 = \frac{S_{1l}}{\sqrt{3}I_1} = \frac{13{,}63 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 20} = 393{,}5 \text{ V}$$

Finalmente:

$$\cos\varphi_g = \frac{P_g}{S_g} = \frac{P_g}{\sqrt{P_g^2 + Q_g^2}} = \frac{19{,}2}{\sqrt{19{,}2^2 + 13{,}77^2}} = 0{,}81$$

3.23. Las tensiones de fase de un generador ideal conectado en estrella son:

$$e_a(t) = 300\cos(100\pi t) \quad \text{(V)}$$

$$e_b(t) = 300\cos(100\pi t + 120^\circ) \quad \text{(V)}$$

$$e_c(t) = 300\cos(100\pi t - 120^\circ) \quad \text{(V)}$$

Dicho generador alimenta una carga equilibrada conectada en triángulo, cuya impedancia por fase es $\mathbf{Z}_\Delta = 3 + j4\ (\Omega)$. Se pide:

a) Determinar la secuencia de fases.

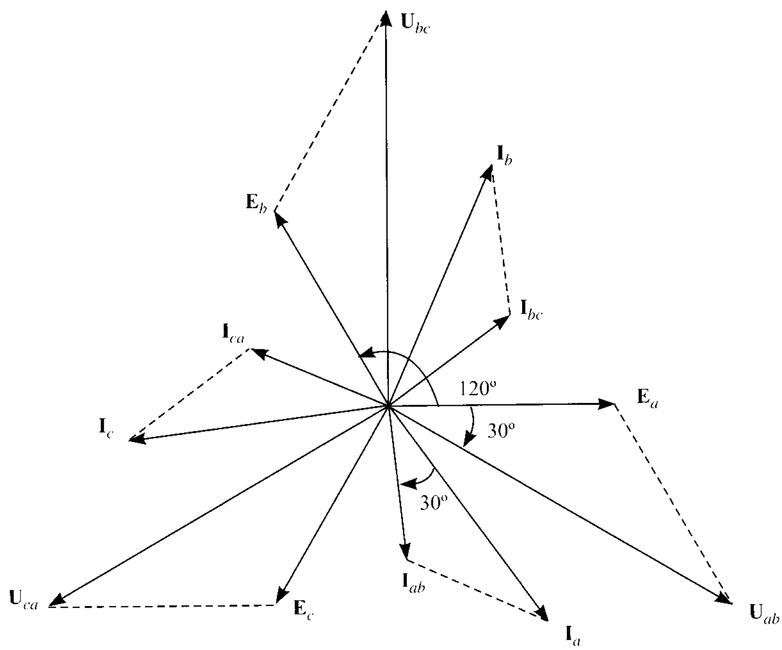
b) Dibujar un diagrama vectorial en el que aparezcan las tensiones e intensidades de línea, indicando sus desfases respectivos, así como sus valores eficaces. Tomar como origen de fases la tensión compleja asociada a $e_a(t)$.

c) Dibujar la conexión de dos vatímetros dispuestos para medir la potencia de la carga de acuerdo al método de los dos vatímetros. Deducir mediante el diagrama vectorial del apartado anterior la lectura de cada vatímetro.

SOLUCIÓN

a) A partir de los desfases de las tensiones simples del generador, se deduce que la secuencia de fases es inversa.

b) El diagrama vectorial de las tensiones e intensidades de línea es:



Las tensiones de línea a la vista de la figura son:

$$\mathbf{U}_{ab} = \mathbf{E}_a \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/-30^\circ}\ \text{V}$$

$$\mathbf{U}_{bc} = \mathbf{E}_b \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300}{\sqrt{2}}\underline{/120^\circ} \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/90^\circ}\ \text{V}$$

$$\mathbf{U}_{ca} = \mathbf{E}_c \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300}{\sqrt{2}}\underline{/-120^\circ} \cdot \sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/-150^\circ}\ \text{V}$$

A partir de las tensiones anteriores se calculan las intensidades de fase:

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{U}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\dfrac{300}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\underline{/-72^\circ}}{3 + j4} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/-83{,}13^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \mathbf{I}_{ab} \cdot 1\underline{/120^\circ} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/36{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \mathbf{I}_{ab} \cdot 1\underline{/-120^\circ} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/156{,}87^\circ} \text{ A}$$

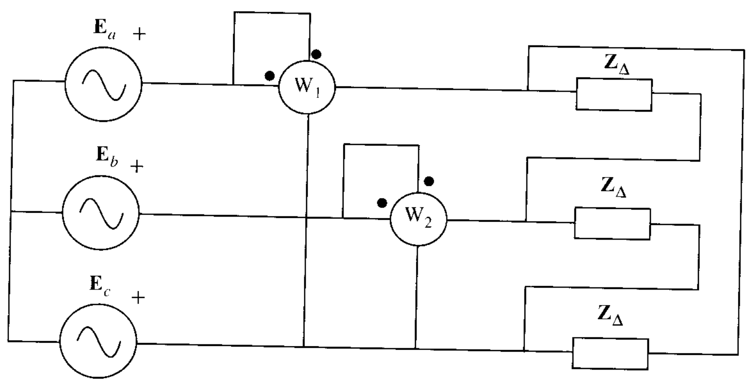
Y con las intensidades de fase y a la vista del diagrama vectorial, se calculan las inte dades de línea:

$$\mathbf{I}_a = \sqrt{3}\underline{/30^\circ} \cdot \mathbf{I}_{ab} = \sqrt{3}\underline{/30^\circ} \cdot \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{/-83{,}13^\circ} = \frac{180}{\sqrt{2}}\underline{/-53{,}13^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \cdot 1\underline{/120^\circ} = \frac{180}{\sqrt{2}}\underline{/66{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \cdot 1\underline{/-120^\circ} = \frac{180}{\sqrt{2}}\underline{/-173{,}13^\circ} \text{ A}$$

c) La conexión de los vatímetros para aplicar el método de los dos vatímetros es la indica en la figura.

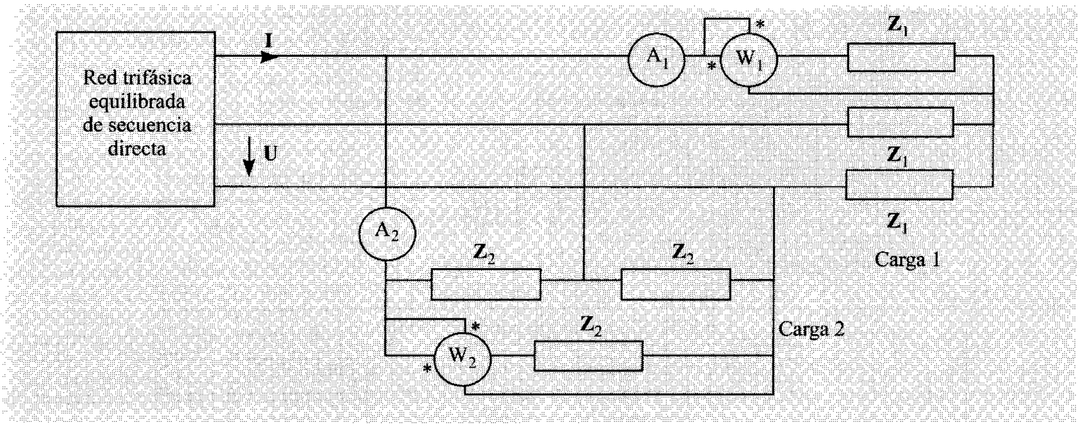


3.24. El circuito de la figura está constituido por dos cargas trifásicas equilibradas, alimentadas por una red trifásica equilibrada de tensión de línea $U = 380$ V. La carga 1 consiste en tres impedancias conectadas en estrella y la carga 2 en otras tres impedancias conectadas en triángulo. La red suministra únicamente potencia activa. Las lecturas de los aparatos de medida son $A_1 = A_2 = 8{,}776$ A y $W_1 = W_2 = 1155{,}2$ W. Se pide:

1. Calcular los valores $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ e indicar si son inductivas o capacitivas.

2. La intensidad I.

3. Se desea medir la potencia activa y reactiva de la red, y se dispone para ello de un vatímetro. Dibujar cómo se debe conectar para cada tipo de medida y deducir cuánto marcaría en las dos conexiones.



SOLUCIÓN

1. Las lecturas de los vatímetros indican la potencia consumida en cada fase.

Carga 1:

$$\cos\varphi_1 = \frac{P}{\sqrt{3}UI} = \frac{3\cdot 1.155{,}2}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 8{,}776} = 0{,}6 \Rightarrow \varphi_1 = 53{,}13^{\circ}$$

$$Z_1 = \frac{U_{1F}}{I_{1F}} = \frac{380/\sqrt{3}}{8{,}776} = 25\ \Omega$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z}_1 = 25\underline{/53{,}13^{\circ}}\ \Omega \text{ (inductiva)}$$

Carga 2:

$$\cos\varphi_2 = \frac{P}{\sqrt{3}UI} = \frac{3\cdot 1.155{,}2}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 8{,}776} = 0{,}6 \Rightarrow \varphi_2 = -53{,}13^{\circ}$$

$$Z_2 = \frac{U_{2F}}{I_{2F}} = \frac{380}{8{,}776/\sqrt{3}} = 75\ \Omega$$

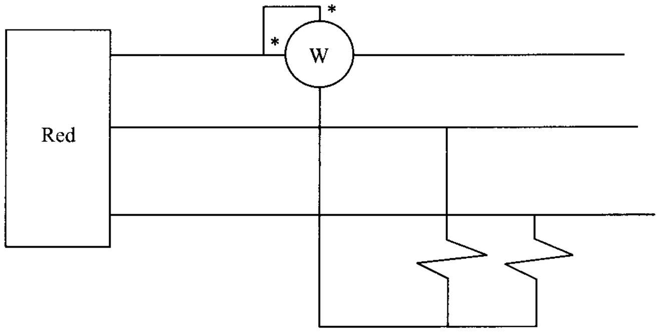
$$\Rightarrow \mathbf{Z}_2 = 75\underline{/-53{,}13^{\circ}}\ \Omega \text{ (capacitiva)}$$

Nota: si se parte del supuesto que la carga 1 es inductiva, la carga 2 debe ser capacitiva para que el generador no suministre potencia reactiva.

2. Intensidad de línea:

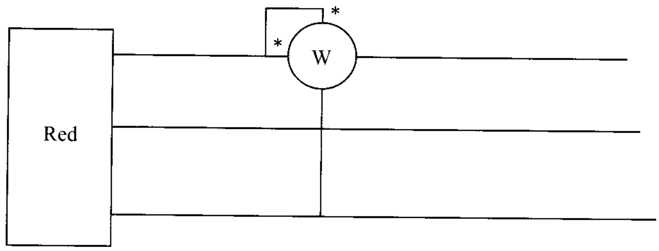
$$I = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{6\cdot 1.155{,}2}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 1} = 10{,}53\ \text{A}$$

3. Medida de P:



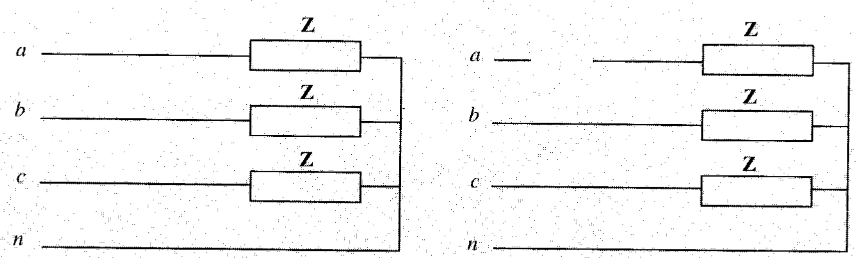
siendo la medida del vatímetro $W = 2\cdot 1.155{,}2 = 2.310{,}4$ W.

Medida de Q:



En este caso la medida de $W = 0$ W, por ser nula la potencia reactiva cedida por la red.

3.25. El sistema de la figura está alimentado por un sistema de tensiones de fase equilibradas y de secuencia directa. La tensión de línea es $U = 433$ V, y la impedancia vale $\mathbf{Z} = 15 - j20$ (Ω). Dibujar los diagramas vectoriales de tensiones e intensidades en las impedancias y en el neutro en los circuitos de la figura. Obtener así mismo los valores eficaces de dichas magnitudes.



SOLUCIÓN

En el primer caso el sistema es equilibrado. La tensión de fase es $\sqrt{3}$ veces menor que la de línea. Si se toma la tensión de la fase a como referencia, la corriente de dicha fase vale:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_{an}}{\mathbf{Z}} = \frac{433/\sqrt{3}}{15 - \mathrm{j}20} = 6 + \mathrm{j}8 = 10\underline{/53{,}13^\circ} \text{ A}$$

Luego las corrientes de las fases b y c y del neutro serán:

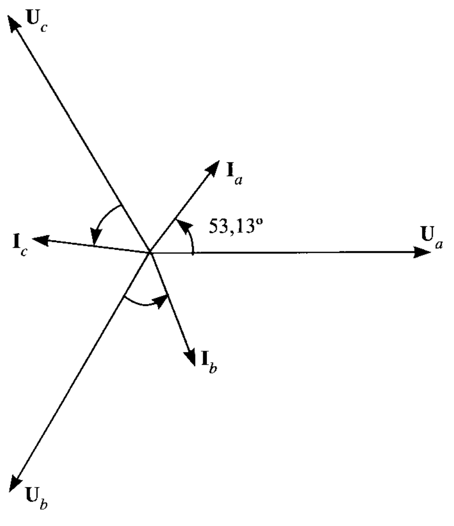
$$\mathbf{I}_b = 10\underline{/53{,}13^\circ - 120^\circ} \text{ A} = 10\underline{/-66{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = 10\underline{/53{,}13^\circ + 120^\circ} \text{ A} = 10\underline{/173{,}13^\circ} \text{ A}$$

Se puede comprobar, aplicando la primera ley de Kirchhoff, que:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0 \text{ A}$$

El diagrama vectorial de tensiones e intensidades se muestra en la figura.



El segundo sistema es desequilibrado. Las corrientes en este caso valen:

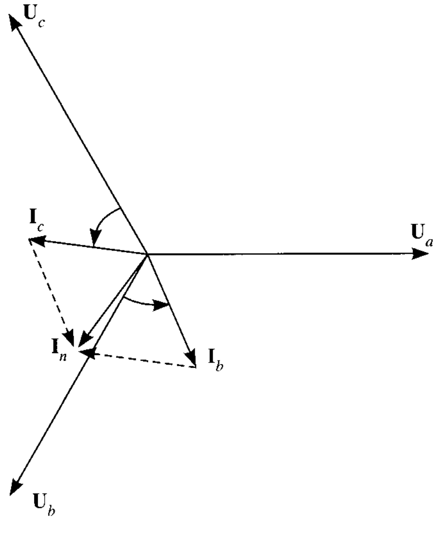
$$\mathbf{I}_a = 0 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = 10\underline{/-66{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = 10\underline{/173{,}13^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 10\underline{/53{,}13^\circ + 180^\circ} \text{ A} = 10\underline{/233{,}13^\circ} \text{ A}$$

Las nuevas corrientes se muestran en la figura siguiente:



3.26. Un sistema trifásico equilibrado de frecuencia 50 Hz tiene las siguientes tensiones de línea:

$$\mathbf{U}_{ab} = 433\underline{/0^\circ} \text{ V}; \qquad \mathbf{U}_{bc} = 433\underline{/-120^\circ} \text{ V} \quad \text{y} \quad \mathbf{U}_{ca} = 433\underline{/120^\circ} \text{ V}$$

Este sistema alimenta una carga trifásica en estrella de impedancia por fase $\mathbf{Z} = 8 + j6\ \Omega$.

1. Calcular las intensidades de línea en módulo y fase.
2. Dibujar cómo se colocarían los vatímetros para medir la potencia activa y reactiva q cede la fuente (elegir los métodos que se prefieran), y deducir cuánto marca cada u de ellos.
3. Se desea compensar el factor de potencia de la carga colocando en paralelo una ba ría de condensadores en triángulo hasta que el factor de potencia sea la unidad. Calc lar la capacidad por fase de esta batería.
4. Repetir los Apartados 1 y 2 con los condensadores conectados.

Solución

1. Si el sistema de tensiones de línea es equilibrado y de secuencia directa, las tensiones fase están retrasadas 30° con respecto a las de línea y su módulo es $\sqrt{3}$ veces menor:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{/-30^\circ} = \frac{433}{\sqrt{3}} \underline{/-30^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{bc} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{/-30^\circ} = \frac{433}{\sqrt{3}} \underline{/-150^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{U}_{ca} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{/-30^\circ} = \frac{433}{\sqrt{3}} \underline{/90^\circ} \text{ V}$$

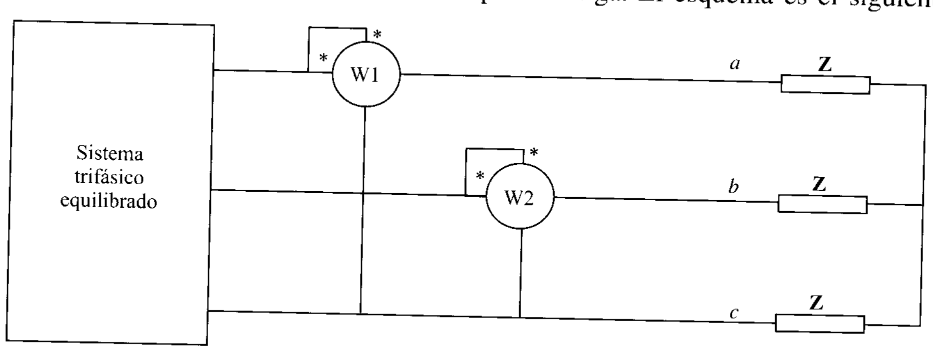
Al estar la carga en estrella, las intensidades de línea son:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}} = \frac{433/\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}}{8 + j6} = \frac{433/\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}}{10\underline{/36{,}87^\circ}} = 25\underline{/-66{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{U}_b}{\mathbf{Z}} = \frac{433/\sqrt{3}\underline{/-150^\circ}}{10\underline{/36{,}87^\circ}} = 25\underline{/-186{,}87^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{U}_c}{\mathbf{Z}} = \frac{433/\sqrt{3}\underline{/90^\circ}}{10\underline{/36{,}87^\circ}} = 25\underline{/53{,}13^\circ} \text{ A}$$

2. Como el sistema es equilibrado, se puede emplear el método de los dos vatímetros para medir la potencia activa y reactiva consumidas por la carga. El esquema es el siguiente:



La medida de cada vatímetro será:

$$W_1 = UI\cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a) = UI\cos(-60^\circ - (-66{,}87^\circ)) = 433{,}25 \cdot \cos(6{,}87^\circ) = 10.747{,}3 \text{ W}$$

$$W_2 = UI\cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b) = UI\cos(-120^\circ - (-186{,}87^\circ)) = 433{,}25 \cdot \cos(66{,}87^\circ) = 4.252{,}3 \text{ W}$$

Y las potencias activa y reactiva:

$$P = W_1 + W_2 = 10.747{,}3 + 4.252{,}3 = 14.999{,}6 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) = \sqrt{3}(10.747{,}3 - 4.252{,}3) = 11.249{,}7 \text{ VAr}$$

También se podía haber operado a la inversa, es decir, calcular primero la potencia activa y reactiva, según las expresiones:

$$P = \sqrt{3}UI\cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 433\cdot 25\cdot \cos(36{,}87°) = 14.999{,}6 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3}UI\,\text{sen}\,\varphi = \sqrt{3}\cdot 433\cdot 25\cdot \text{sen}\,(36{,}87°) = 11.249{,}7 \text{ VAr}$$

Y conocidas P y Q calcular W_1 y W_2.

3. Para que el factor de potencia sea la unidad, los condensadores deben ceder toda la potencia reactiva que consume la carga. Por tanto, la capacidad de dichos condensadores conectados en triángulo debe ser:

$$C_\Delta = \frac{Q}{3\omega U^2} = \frac{11.249{,}7}{3\cdot 100\pi\cdot 433^2} = 63{,}66\ \mu\text{F}$$

4. Con la batería de condensadores conectados, la fuente no suministra potencia reactiva y la potencia activa es la misma que antes de compensar el factor de potencia. A partir de P y U se obtiene la nueva intensidad de línea:

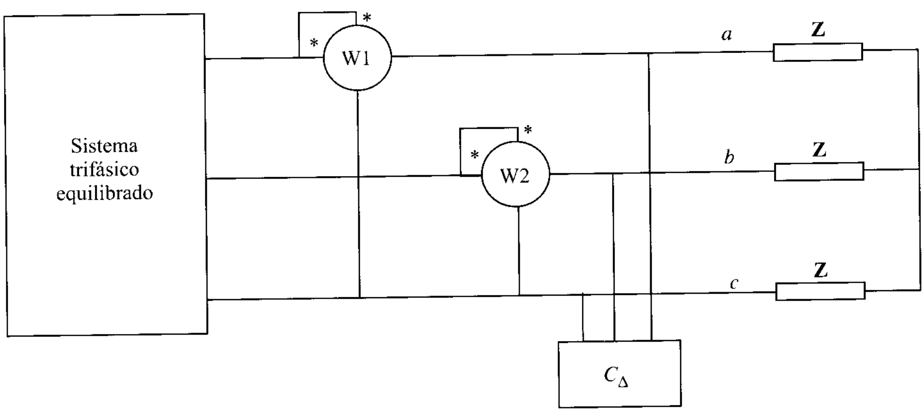
$$P = \sqrt{3}UI \quad\Rightarrow\quad I = \frac{P}{\sqrt{3}U} = \frac{14.999{,}6}{\sqrt{3}\cdot 433} = 20 \text{ A}$$

Para hallar la fase de las intensidades de línea, se tiene en cuenta que el sistema ahora es resistivo, luego cada intensidad estará en fase con la tensión de fase correspondiente:

$$\mathbf{I}_a = 20\underline{/-30°}\text{ A} \qquad \mathbf{I}_b = 20\underline{/-150°}\text{ A} \qquad \mathbf{I}_c = 20\underline{/90°}\text{ A}$$

Después de conectar la batería de condensadores la potencia reactiva es nula, y las medidas de ambos vatímetros son iguales e iguales a la mitad de la potencia activa:

$$W_1 = W_2 = P/2 = 7499{,}8 \text{ W}$$



3.27. Un generador ideal, trifásico y equilibrado, de tensión 380 V, alimenta a dos cargas trif-cas equilibradas conectadas en paralelo. La carga 1 presenta un factor de potencia inductivo mientras que el de la carga 2 es 0,5 capacitivo. Calcular:

a) Las intensidades de línea del generador y de las cargas 1 y 2 sabiendo que el gene-dor no cede ni absorbe potencia reactiva y suministra 3291 W.

b) Potencias activa y reactiva de cada carga en las condiciones del Apartado a.

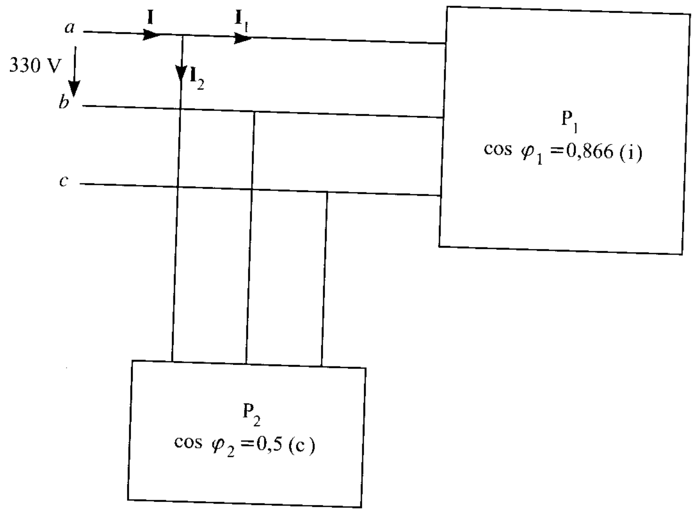
c) Valores de las impedancias por fase $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ de las cargas 1 y 2 respectivamente, las impedancias $\mathbf{Z}_1$ están conectadas en estrella y las impedancias $\mathbf{Z}_2$ lo están en triá-gulo para satisfacer las condiciones del Apartado a.

d) Intensidad de línea y potencia activa y reactiva del generador si las impedancias $\mathbf{Z}_1$ conectan en triángulo y las impedancias $\mathbf{Z}_2$ se conectan en estrella.

SOLUCIÓN

a) y **b)** A partir del esquema del circuito que se expone a continuación, la intensidad línea en el generador se puede calcular conociendo la potencia activa que suministra:

$$P_g = \sqrt{3}UI_g\cos\varphi = \sqrt{3}UI_g \quad\Rightarrow\quad I_g = \frac{P}{\sqrt{3}U} = \frac{3.291}{\sqrt{3}\cdot 380} = 5\ \text{A}$$



Como el generador no absorbe ni cede potencia activa se debe cumplir que la potencia reactiva cedida por la carga 2 sea igual a la consumida por la carga 1, $Q_1 = -Q_2$. Además la suma de las potencias activas consumidas por ambas cargas es igual a la potencia total. $P_1 + P_2 = P$. Es decir, hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} P_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_1 = -P_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_2 \\ P_1 + P_2 = P \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de φ_1 y φ_2:

$$\begin{cases} P_1\dfrac{1}{\sqrt{3}} = P_2\sqrt{3} \\ P_1 + P_2 = 3.291 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left| \begin{array}{l} P_1 = 2.468{,}25\ \text{W} \\ P_2 = 822{,}75\ \text{W} \end{array} \right. \quad\Rightarrow\quad Q_1 = Q_2 = 1.425\ \text{VAr}$$

Conocidas las potencias activas que consumen las cargas, se pueden hallar las intensidades de línea en cada una:

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}U\cos\varphi_1} = \frac{2.468{,}25}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot\sqrt{3}/2} = 4{,}33 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}U\cos\varphi_2} = \frac{822{,}75}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 1/2} = 2{,}5 \text{ A}$$

c) Sabiendo que la carga 1 está conectada en estrella y la 2 está en triángulo, las impedancias de cada carga son:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \frac{U_{1F}}{I_{1F}} = \frac{380/\sqrt{3}}{4{,}33} = 50{,}67 \ \Omega \\ Z_2 &= \frac{U_{2F}}{I_{2F}} = \frac{380}{2{,}5/\sqrt{3}} = 263{,}27 \ \Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= 50{,}67\underline{/30^\circ} \ \Omega \\ \mathbf{Z}_2 &= 263{,}27\underline{/-60^\circ} \ \Omega \end{aligned}$$

d) Si la carga 1 se conecta en triángulo y la carga 2 en estrella, las nuevas intensidades de fase son:

$$I'_{1F} = \frac{U_{1F}}{Z_1} = \frac{380}{50{,}67} = 7{,}5 \text{ A}$$

$$I'_{2F} = \frac{U_{2F}}{Z_2} = \frac{380/\sqrt{3}}{263{,}27} = 0{,}83 \text{ A}$$

Y las intensidades de línea:

$$I_1 = \sqrt{3}\cdot 7{,}5 = 12{,}99 \text{ A}$$
$$I_2 = 0{,}83 \text{ A}$$

Conocidas las intensidades de línea se calculan las nuevas potencias activas consumidas por cada carga:

$$P'_1 = \sqrt{3}UI'_1\cos\varphi_1 = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 12{,}99\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 7.404{,}3 \text{ W}$$

$$P'_2 = \sqrt{3}UI'_2\cos\varphi_2 = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 0{,}83\cdot\frac{1}{2} = 273{,}14 \text{ W}$$

Y las reactivas:

$$Q'_1 = P'_1\cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = 7.404{,}3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 4.274{,}87 \text{ VAr}$$

$$Q'_2 = P'_2\cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = -273{,}14\cdot\sqrt{3} = -473{,}09 \text{ VAr}$$

Las potencias activa y reactiva producidas por el generador serán:

$$P' = P'_1 + P'_2 = 7.404{,}3 + 273{,}14 = 7.677{,}44 \text{ W}$$

$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = 4.274{,}87 - 473{,}09 = 3.801{,}78 \text{ VAr}$$

Y por último la intensidad de línea del generador:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}U} = \frac{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}{\sqrt{3}U} = \frac{\sqrt{7.677,44^2 + 3.801,78^2}}{\sqrt{3} \cdot 380} = 13,02 \text{ A}$$

3.28. Dos cargas trifásicas C_1 y C_2 están conectadas en paralelo a un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa y frecuencia 50 Hz. La carga C_1 absorbe una corriente de 16 A, una potencia de 10 kW, con un factor de potencia de 0,8 inductivo. La carga C_2 tiene carácter capacitivo y absorbe una potencia de 6 kW. La corriente demandada por el conjunto de las dos cargas es de 21 A y el conjunto presenta carácter inductivo. Calcular:

a) Tensión en las cargas.

b) Factor de potencia de C_2 y corriente que absorbe.

SOLUCIÓN

a) En la carga 1:

$$P_1 = \sqrt{3}UI_1 \cos\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{P_1}{\sqrt{3}I_1 \cos\varphi_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 16 \cdot 0,8} = 451,05 \text{ V}$$

Al estar las dos cargas conectadas en paralelo, la tensión es la misma, $U = 451,05$ V.

b) El conjunto de ambas cargas absorbe una potencia aparente

$$S = \sqrt{3}UI = \sqrt{3} \cdot 451,05 \cdot 21 = 16.406,07 \text{ VA}$$

y una potencia activa:

$$P = P_1 + P_2 = 10 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3 = 16 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Como

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

y sabiendo que el conjunto tiene carácter inductivo, se tiene que la potencia reactiva total vale:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{16.406,07^2 - 16.000^2} = 3.627,55 \text{ VAr}$$

Y la potencia reactiva de la carga 2:

$$Q_2 = Q - Q_1 = 3.627,55 - 7,5 \cdot 10^3 = -3.872,45 \text{ VAr}$$

Luego, el factor de potencia de la carga 2 es:

$$\cos\varphi_2 = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-3.872,45}{16 \cdot 10^3}\right)\right) = 0,97 \quad \text{(capacitivo)}$$

Y la corriente absorbida por dicha carga:

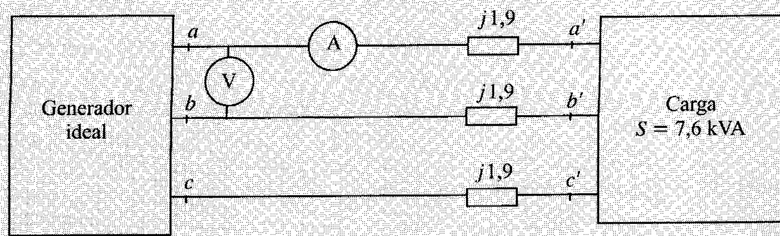
$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}U\cos\varphi_2} = \frac{6 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 451,05 \cdot 0,97} = 7,92 \text{ A}$$

3.29. En el sistema de la figura el amperímetro señala 20 A, el voltímetro 219,4 V (valores eficaces), y la carga consume una potencia aparente de 7,6 kVA. Calcúlese:

1. El valor eficaz de la tensión de línea en la carga, U.

2. Las potencias activa y reactiva consumidas por la carga y generadas por el generador, indicando el carácter inductivo o capacitivo de los mismos.

3. Tanto la carga como el generador están formados por tres fuentes de tensión equilibradas e ideales conectadas en estrella que consumen potencia. La tensión en la fuente conectada en a' es $\mathbf{U}_{a'} = U/\sqrt{3}\angle\delta$, y la tensión en la fase a del generador se toma como origen de fases. Calcúlese el valor de la potencia máxima que puede consumir la carga, y la corriente que consumiría.



SOLUCIÓN

1. De la potencia aparente consumida por la carga se puede calcular la tensión de línea U:

$$S = \sqrt{3}UI \quad \Rightarrow \quad U = \frac{S}{\sqrt{3}I} = \frac{7{,}6 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 20} = 219{,}4 \text{ V}$$

Potencia activa consumida en la carga:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad \Rightarrow \quad P^2 = S^2 - Q^2$$

Potencia activa suministrada por el generador:

$$S_g^2 = P_g^2 + Q_g^2 \quad \Rightarrow \quad P_g^2 = S_g^2 - Q_g^2$$

Pero como la línea es puramente inductiva $P = P_g$.

Además, puesto que la tensión en la carga es la misma que en el generador, las potencias aparentes consumidas y generadas tienen el mismo valor:

$$S_g = S = \sqrt{3}UI = \sqrt{3} \cdot 239{,}4 \cdot 20 = 8.293 \text{ VA}$$

Por otra parte, la potencia reactiva generada es la suma de la consumida por la carga y la línea:

$$Q_g = Q + \Delta Q$$

siendo

$$\Delta Q = 3X_l I^2 = 3 \cdot 1{,}9 \cdot 20^2 = 2.280 \text{ VAr}$$

Por tanto, teniendo en cuenta todas estas ecuaciones podemos escribir:

$$S_g^2 = P_g^2 + Q_g^2 = P^2 + (Q + \Delta Q)^2 = S^2 - Q^2 + (Q + \Delta Q)^2$$

Como $S_g = S$:

$$0 = -Q^2 + Q^2 + \Delta Q^2 + 2 \cdot Q \cdot \Delta Q$$

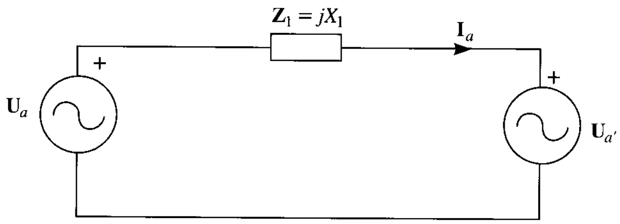
De aquí se deduce que:

$$Q = -\Delta Q/2 = -1.140 \text{ VAr} \quad \Rightarrow \quad \text{Capacitivo}$$

$$P_g = P = \sqrt{7.600^2 - 1.140^2} = 7.514 \text{ W}$$

$$Q_g = Q + \Delta Q = -1.140 + 2.280 = 1.140 \text{ VAr} \quad \Rightarrow \quad \text{Inductivo}$$

2. Equivalente monofásico fase-neutro:



Sean las tensiones de la fuente y de la carga:

$$\mathbf{U}_a = U/\sqrt{3}\angle 0^\circ \qquad \mathbf{U}_{a'} = U/\sqrt{3}\angle \delta$$

La potencia aparente transmitida entre la fuente y la carga será:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{U}_{a'}\mathbf{I}'^* = 3\mathbf{U}_{a'}\left(\frac{\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_{a'}}{jX_1}\right)^* = 3\,\frac{\mathbf{U}_a\mathbf{U}_{a'}^* - U_{a'}^2}{(jX_1)^*} = \frac{U^2\angle\delta - U^2}{-jX_1} =$$

$$= j\,\frac{U^2}{X_1}(\cos\delta + j\operatorname{sen}\delta) - j\,\frac{U^2}{X_1} = -\frac{U^2}{X_1}\operatorname{sen}\delta + j\,\frac{U^2}{X_1}(\cos\delta - 1)$$

En esta fórmula se deduce que la máxima potencia activa que puede transportarse se obtiene para $\operatorname{sen}\delta = -1$.

$$\Rightarrow \quad \cos\delta = 0$$

Por tanto:

$$P_{\text{máx}} = U^2/X_1 = 219{,}4^2/1{,}9 = 25.335 \text{ W}$$

$$Q_{\text{máx}} = -U^2/X_1 = -219{,}4^2/1{,}9 = -25.335 \text{ VAr}$$

De ambas:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pues} \quad \varphi = -45^\circ$$

Y la corriente de línea:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{25.335}{\sqrt{3}\cdot 219{,}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 94{,}28 \text{ A}$$

3.30. Una fuente de tensión trifásica equilibrada de secuencia directa, de tensión de línea $E = 400$ V alimenta una carga equilibrada de factor de potencia 0,85 inductivo, formada por tres impedancias conectadas en triángulo, $\mathbf{Z}_\Delta$, a través de una línea de impedancia $\mathbf{Z}_1 = 0{,}1 + j0{,}3$ (Ω). Determínese:

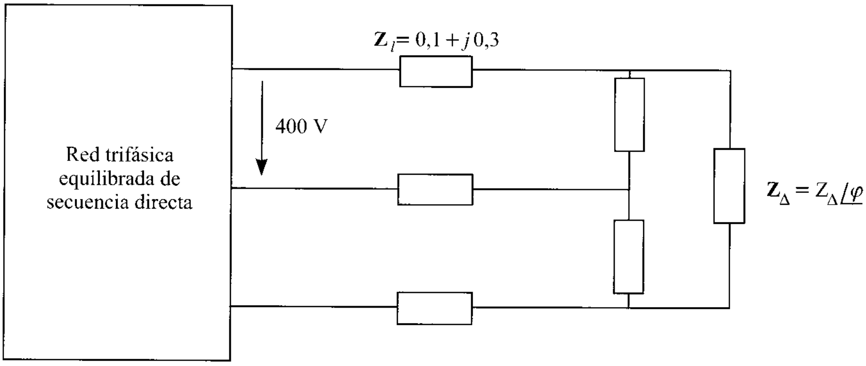
1. El valor de la impedancia $\mathbf{Z}_\Delta$ (con el factor de potencia indicado) de la carga para que el valor eficaz de la tensión de línea en ella, U, sea de 380 V.

2. El valor de la potencia consumida por la carga.

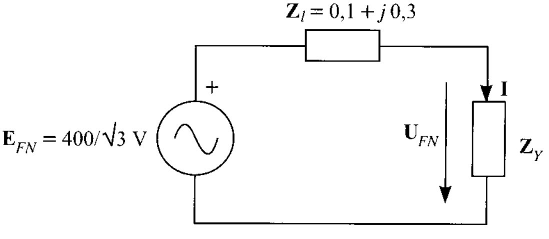
3. Valor de las resistencias, conectadas en estrella, que habría que colocar en paralelo con la carga para que el conjunto carga-resistencias consuma el doble de potencia que la obtenida en el apartado anterior.

SOLUCIÓN

El sistema del enunciado se representa en la figura siguiente:



Para hallar el valor de la impedancia $\mathbf{Z}_\Delta$ es conveniente realizar el equivalente monofásico fase-neutro, que se muestra a continuación:



en el que la impedancia $\mathbf{Z}_Y$ toma el valor $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = Z_Y\angle\varphi$, y φ es el ángulo de la impedancia $\mathbf{Z}_\Delta$ que vendrá dado por su factor de potencia

$$\varphi = \arccos 0,85 = 31,79^\circ$$

Por tanto, $\mathbf{Z}_Y = R_Y + jR_Y \operatorname{tg} 31,79 = R_Y(1 + j0,62)$.

La tensión en la impedancia $\mathbf{Z}_Y$ viene dada por la expresión:

$$\mathbf{U}_{FN} = \frac{\mathbf{Z}_Y}{\mathbf{Z}_Y + \mathbf{Z}_l}\mathbf{E}_{FN} = \frac{R_Y(1 + j0,62)}{(R_Y + 0,1) + j(0,62R_Y + 0,3)}\mathbf{E}_{FN}$$

$$\left(\frac{380}{400}\right)^2 = \frac{R_Y^2(1 + 0,62^2)}{(R_Y + 0,1)^2 + (0,62R_Y + 0,3)^2}$$

De aquí se obtiene la ecuación cuadrática

$$0{,}9025(R_Y^2 + 0{,}01 + 0{,}2R_Y + 0{,}09 + 0{,}3844R_Y^2 + 0{,}372R_Y^2) = 1{,}3844R_Y^2$$
$$0{,}135R_Y^2 - 0{,}5263R_Y - 0{,}0925 = 0$$

cuya solución es:

$$R_Y = 4\ \Omega$$
$$X_Y = 0{,}62R_Y = 2{,}48\ \Omega$$

Y, por tanto,

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 12 + j7{,}44$$

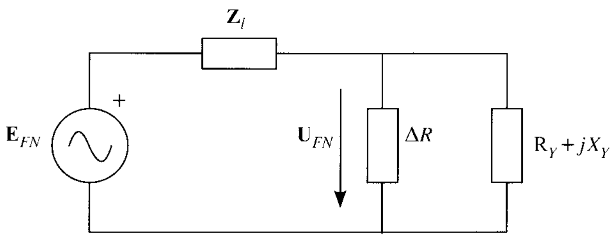
En cuanto a la potencia consumida por la carga, una vez conocida la impedancia de é la corriente de línea que circula por el circuito será:

$$I = \frac{E/\sqrt{3}}{|\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y|} = \frac{400/\sqrt{3}}{\sqrt{4{,}1^2 + 2{,}78^2}} = 46{,}62\ \text{A}$$

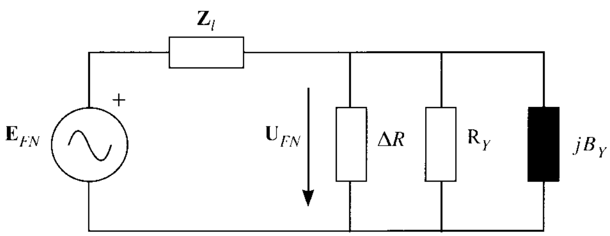
Y, por tanto, las potencias activa y reactiva consumidas, por la carga serán:

$$P = 3 \cdot I^2 R_Y = 3 \cdot 46{,}62^2 \cdot 4 = 26.081{,}6\ \text{W}$$
$$Q = 3 \cdot I^2 \cdot X_Y = 16.170\ \text{VAr}$$

Si se desea duplicar la potencia que suministra la carga, mediante una resistencia instalada en paralelo, ΔR, se realizará el montaje de la figura:



Puesto que la impedancia $\mathbf{Z}_Y$ y la resistencia ΔR están conectadas en paralelo, será más fácil emplear las admitancias.



La admitancia de la carga en estrella será $\mathbf{Y}_Y = 1/\mathbf{Z}_Y = 0{,}18 - j\ 0{,}112$. Por otra parte, la tensión $\mathbf{U}_{FN}$ se puede escribir como:

$$\mathbf{U}_{FN} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_c + \mathbf{Z}_l}\,\mathbf{E}_{FN} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_t}\,\mathbf{E}_{FN}$$

Donde $\mathbf{Z}_c$ es la impedancia resultante de la asociación en paralelo de R_Y, B_Y e ΔR. Esta relación en función de las impedancias, y en módulo, será:

$$U_{FN} = \frac{Y_t}{Y_c} E_{FN}$$

Puesto que la impedancia de carga que se añade es puramente resistiva:

$$\mathbf{Y}_c = G_c + jB_c = G_c - j0{,}112$$

por lo que

$$Y_c^2 = G_c^2 + 0{,}112^2$$

Por otra parte, la admitancia de la línea será $\mathbf{Y}_l = 1/\mathbf{Z}_l = 1/(0{,}1 + j0{,}3) = 1 - j3$.

Y la asociación serie de las dos admitancias, $\mathbf{Y}_t$, será:

$$\mathbf{Y}_t = \frac{(G_c + jB_c)(G_l + jB_l)}{(G_c + G_l) + j(B_c + B_l)}$$

Cuyo módulo al cuadrado es:

$$Y_t^2 = \frac{(G_c^2 + 0{,}112^2)(G_l^2 + B_l^2)}{(G_c + G_l)^2 + (B_c + B_l)^2}$$

La potencia que debe consumir la nueva impedancia de carga será:

$$2P = 3G_c \cdot U^2/3 = G_c \frac{Y_t^2}{Y_c^2} E^2$$

Esto conduce a la ecuación

$$\frac{2P}{E^2} = \frac{G_c(G_l^2 + jB_l^2)}{(G_c + G_l)^2 + (B_c + B_l)^2}$$

en la que se sustituyen los valores numéricos, llegándose a:

$$\frac{2 \cdot 26.081{,}6}{400^2} = \frac{10G_c}{(G_c + 1)^2 + 3{,}112^2}$$

Que conduce a la ecuación:

$$0{,}326G_c^2 - 9{,}348G_c + 3{,}183 = 0$$

Cuya solución da dos valores posibles:

$$G_c = 28{,}3\ S, \text{ por lo que } \Delta G = 28{,}3 - 0{,}18 = 28{,}15 \text{ S}$$

$$G_c = 0{,}3446\ S, \text{ lo que implica que } \Delta G = 0{,}1646 \text{ S}$$

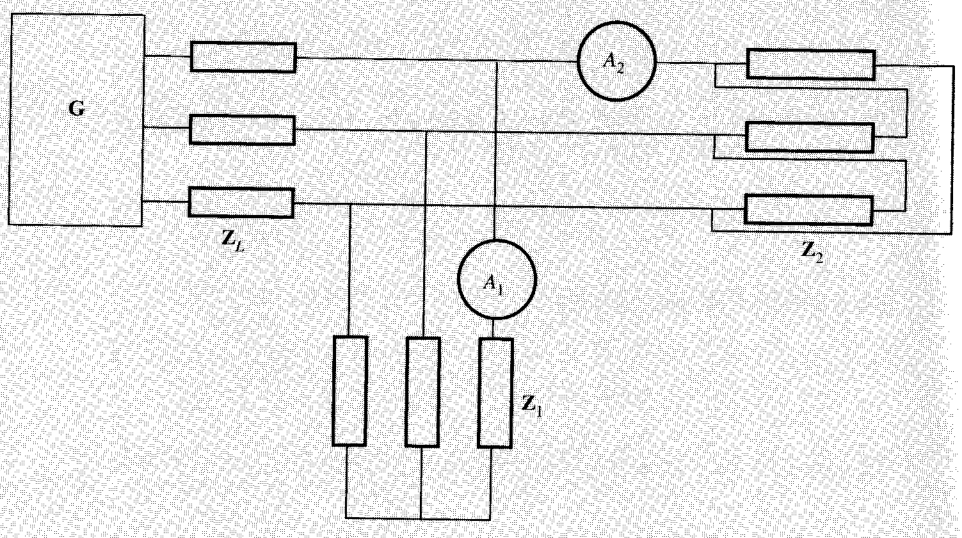
o lo que es lo mismo,

$$\Delta R = 0{,}0355\ \Omega$$

$$\Delta R = 6{,}075\ \Omega$$

3.31. El circuito de la figura se encuentra alimentado por una fuente trifásica equilibrada de [secuencia] cuencia directa. Determínese:

1. Tensión de línea de la carga 2.
2. Intensidad medida por el amperímetro A_1.
3. Intensidad suministrada por el generador.
4. Potencia consumida por las cargas, la línea y la potencia suministrada por la fuente.
5. Tensión de línea de la fuente



$\mathbf{Z}_1 = 2 + j\ \Omega$ $\mathbf{Z}_2 = 3 + j6\ \Omega$ $\mathbf{Z}_L = 3\ \Omega$ $A_2 = 1$ A

SOLUCIÓN

La tensión de fase, que coincide con la tensión de línea en la carga conectada en triángulo, será el valor de la corriente de fase multiplicado por el valor de la impedancia, esto es:

$$U = I_{F2} \cdot Z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{9 + 36} = \sqrt{15}\ \mathrm{V}$$

puesto que la corriente de fase en la carga en triángulo es $\frac{1}{\sqrt{3}}$, por ser la corriente de línea que consume, medida por A_2, igual a 1 A.

La corriente que mide el amperímetro A_1 se obtiene de la siguiente manera:

$$I_1 = \frac{U/\sqrt{3}}{Z_1} = \frac{\sqrt{15}/\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 1\ \mathrm{A}$$

Para determinar la corriente suministrada por el generador, se obtiene el paralelo de la impedancia $\mathbf{Z}_1$ y la impedancia en estrella equivalente a $\mathbf{Z}_2$, cuyo valor es:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_{2Y}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{2Y}} = \frac{(2 + j)(1 + j2)}{3 + j3} = \frac{5}{6}(1 + j)$$

Y por tanto, la corriente será:

$$I = \frac{U/\sqrt{3}}{Z_{eq}} = \frac{\sqrt{15}/\sqrt{3}}{\frac{5}{6}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ \text{A}$$

En cuanto a las potencias suministradas y consumidas por los distintos elementos del sistema serán:

- Carga 1:

$$P_1 = 3R_1I_1^2 = 3 \cdot 2 \cdot 1^2 = 6\ \text{W}$$
$$Q_1 = 3 \cdot X_1 \cdot I_1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1^2 = 3\ \text{VAr}$$

- Carga 2:

$$P_2 = 3R_2I_{2F}^2 = 3 \cdot 3I(1/\sqrt{3})^2 = 3\ \text{W}$$
$$Q_2 = 3X_2I_{2F}^2 = 3 \cdot 6I(1/\sqrt{3})^2 = 6\ \text{VAr}$$

- Línea:

$$\Delta P_L = 3R_LI^2 = 3 \cdot 3\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 32{,}4\ \text{W}$$

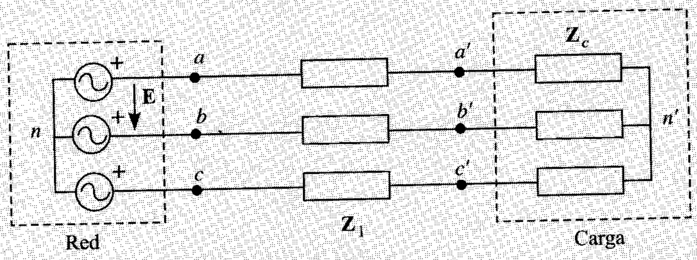
Las potencias activa y reactiva suministradas por la fuente serán la suma de las respectivas potencias activas y reactivas.

$$P_g = P_c = 6 + 3 + 32{,}4 = 41{,}4\ \text{W}$$
$$Q_g = Q_c = 3 + 6 = 9\ \text{VAr}$$

Por último, la tensión en la fuente, que se puede hallar de la forma siguiente:

$$E = \frac{S_g}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{P_g^2 + Q_g^2}}{\sqrt{3I}} = \frac{\sqrt{41{,}4^2 + 9^2}}{\sqrt{3}\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = 12{,}63\ \text{V}$$

3.32. En el circuito de la figura, la carga está formada por tres impedancias conectadas en estrella.



Cuando la tensión aplicada a la carga es de 400 V, consume una potencia activa $P = 12{,}8$ kW y una potencia reactiva $Q = 9{,}6$ kVAr.

a) Hállese el valor de la impedancia de carga.

b) Calcúlense las corrientes y las tensiones en a', b', c' con respecto a tierra en el siste[ma] si se produce un cortocircuito entre el punto a' y tierra, y, n y n' no están conectad[os] a tierra («neutro aislado»).

c) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando el neutro n' está conect[a]do a tierra mediante una impedancia nula («neutro puesto rígidamente a tierra») y [...] está aislado.

d) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando ambos neutros n y n' e[s]tán puestos rígidamente a tierra.

Datos: $\mathbf{Z}_l = 0{,}6 + j0{,}8$; tensión de línea de la red $E = 400$ V. Se considera que la tensió[n] de tierra es 0 V.

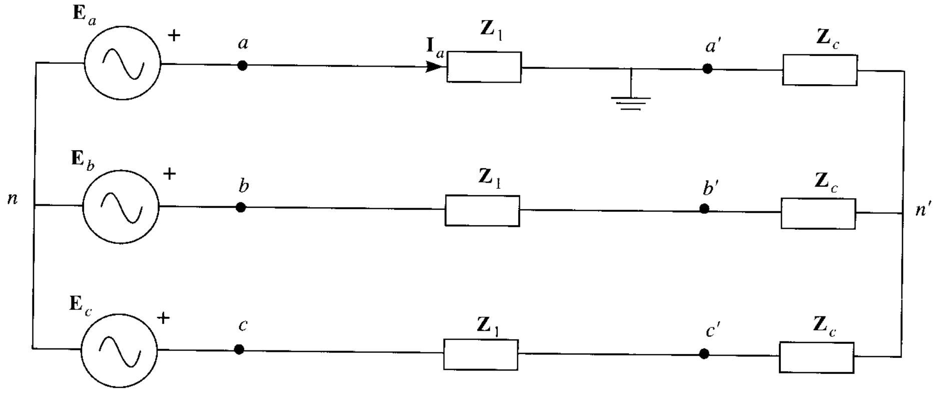
SOLUCIÓN

a) Impedancia de carga.
En esta ocasión también se trabajará con admitancias en vez de con impedancias. El valor d[e] la admitancia de la carga será:

$$G = \frac{P}{3U_{FN}^2} = \frac{12.800}{3 \cdot 400^2/3} = 0{,}08 \text{ S}$$

$$B = -\frac{Q}{3U_{FN}^2} = \frac{-9.600}{400^2} = -0{,}06 \text{ S}$$

Por tanto, la admitancia de la carga será $\mathbf{Y}_c = 0{,}008 - j0{,}06$ y la impedancia $\mathbf{Z}_c = 8 + j6 = 10\underline{/36{,}87^\circ}$.
b) El circuito que queda tras este cortocircuito es el que se muestra a continuación:



La corriente $\mathbf{I}_a$ no resulta alterada por la presencia del cortocircuito, pues por él no se puede derivar corriente, al tratarse del único punto que está conectado a tierra. La corriente por esta fase, valdrá, por tanto:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = \frac{400/\sqrt{3}\underline{/0^\circ}}{0.6 + j0{,}8 + 8 + j6} = 21{,}06\underline{/-38{,}33^\circ}$$

Las tensiones entre los puntos a', b', c' y tierra, sin embargo, han variado, puesto que ahora la tensión nula está en el punto a'. La tensión del punto a' con respecto a n' será:

$$\mathbf{U}_{a'n'} = \mathbf{I}_a\mathbf{Z}_c = 21{,}06\underline{/-38{,}33^\circ}\ 10\underline{/36{,}87^\circ} = 210{,}6\underline{/-1{,}46^\circ}$$

Y la tensión a la que está el punto n' con respecto a tierra será:

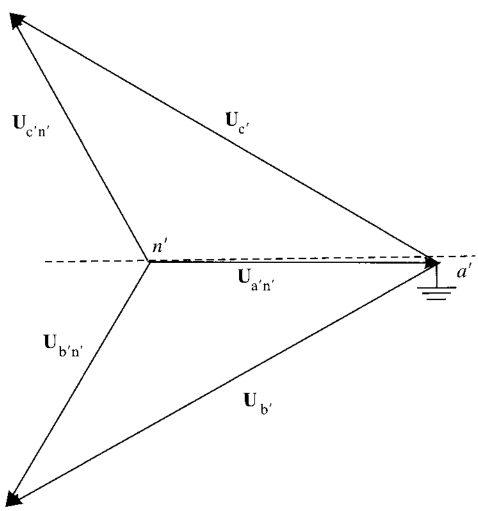
$$\mathbf{U}_{n'} = -\mathbf{U}_{a'n'} = -(21{,}06\underline{/-38{,}33^\circ}\ 10\underline{/36{,}87^\circ}) = 210{,}6\ \underline{/178{,}53^\circ}$$

En cuanto a las tensiones en los puntos b' y c', con respecto a tierra, serán:

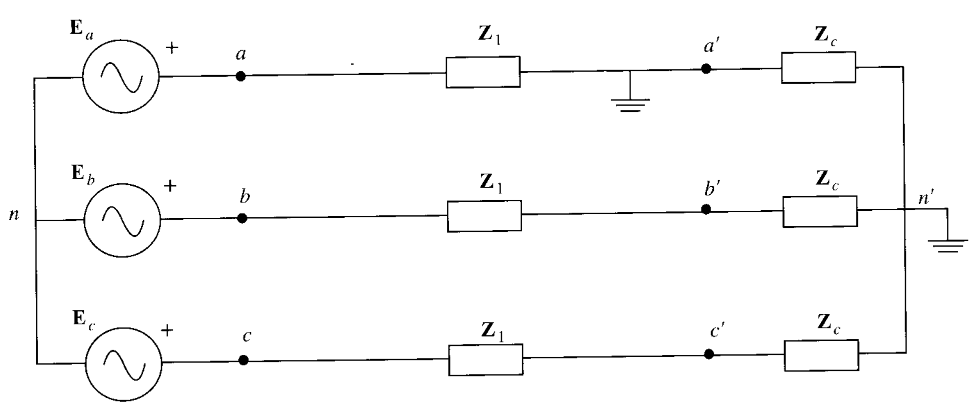
$$\mathbf{U}_{b'} = \mathbf{U}_{b'a'} = \sqrt{3}\cdot 210{,}6\underline{/-1{,}46-150^\circ} = 364{,}77\underline{/-151{,}46^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{c'} = \mathbf{U}_{c'a'} = \sqrt{3}\cdot 210{,}6\underline{/148{,}54^\circ} = 364{,}77\underline{/148{,}54^\circ}$$

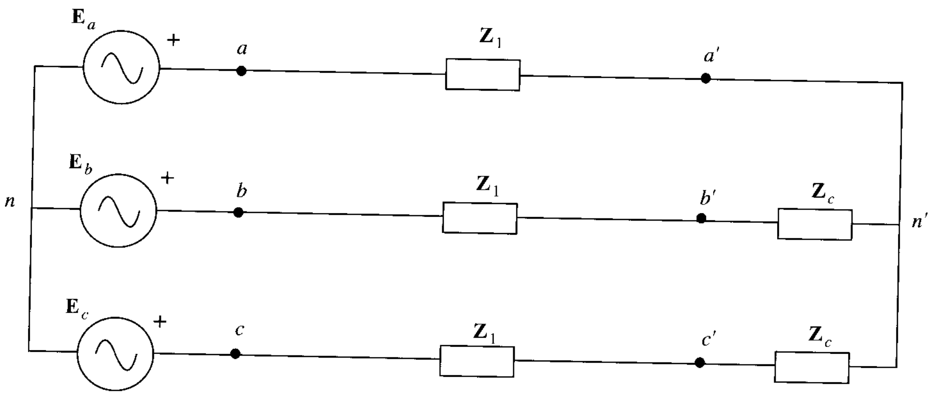
Esto se muestra en el diagrama vectorial adjunto:



c) El circuito en estas condiciones es el representado en la figura siguiente, que es un circuito desequilibrado:



Puesto que los puntos a' y n' están conectados a tierra, la tensión entre ambos puntos es nula, es decir, el circuito es equivalente al siguiente:



Para obtener las tensiones y corrientes, una forma sencilla es aplicar la fórmula de Millman

$$\mathbf{U}_{nn''} = \frac{\sum_k \mathbf{Y}_k \mathbf{U}_k}{\sum_k \mathbf{Y}_k} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} + \dfrac{\mathbf{E}_c}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}$$

Si se hace uso de la propiedad de que $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = 0$, entonces la fórmula anterior queda

$$\mathbf{U}_{nn'} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} - \dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{2}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_c + 3\mathbf{Z}_l}\,\mathbf{E}_a$$

Al sustituir valores se obtiene el valor numérico de $\mathbf{U}_{nn'}$

$$\mathbf{U}_{nn'} = \frac{8 + j6}{8 + j6 + 3(0,6 + j0,8)}\,\frac{400}{\sqrt{3}}\underline{/0^{\circ}} = 179\underline{/-3,73^{\circ}}$$

En cuanto a las corrientes, se obtienen a partir de estas tensiones:

$$\mathbf{I}_a = -\frac{\mathbf{U}_{nn'} - \mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} = 53,59\underline{/-40,6^{\circ}}$$

Y las otras corrientes:

$$\mathbf{I}_b = -\frac{\mathbf{U}_{nn'} - \mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 31,85\underline{/174,3^{\circ}}$$

$$\mathbf{I}_c = -\frac{\mathbf{U}_{mn'} - \mathbf{E}_c}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_c} = 33,04\underline{/105,92^{\circ}}$$

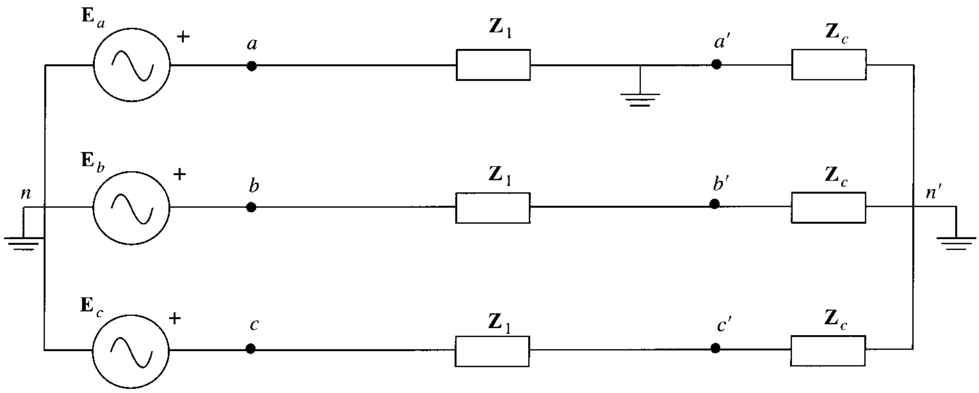
Y las tensiones restantes tendrán el valor:

$$\mathbf{U}_{a'n'} = 0$$

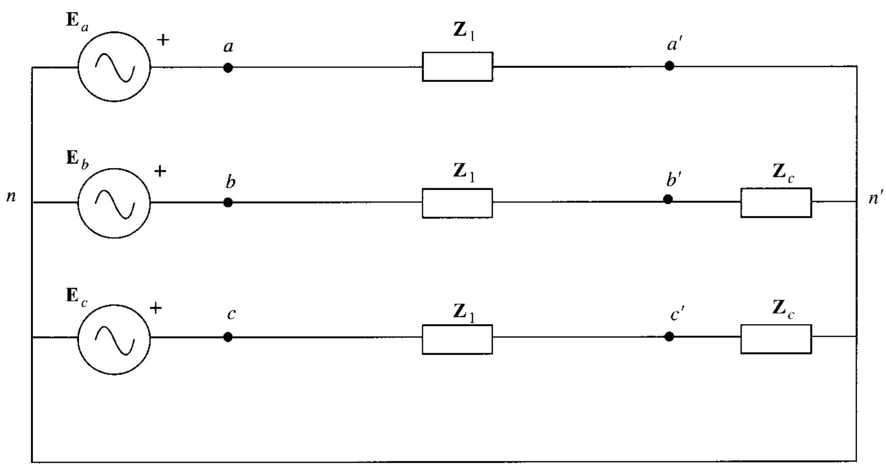
$$\mathbf{U}_{b'n'} = \mathbf{I}_b \cdot \mathbf{Z}_c = 318,5\underline{/-148,83^{\circ}}$$

$$\mathbf{U}_{c'n'} = \mathbf{I}_c \cdot \mathbf{Z}_c = 330,48\underline{/142,79^{\circ}}$$

d) En este caso, el circuito que representa estas condiciones es el representado en la figura siguiente:



Si se unen todos los puntos a la misma tensión, se obtiene el circuito equivalente siguiente:



La resolución de este circuito es más simple, puesto que cada una de las fases se comporta de forma independiente.

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} = 231\underline{/-53{,}13^{\circ}}$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 21{,}06\underline{/-158{,}33^{\circ}}$$

$$\mathbf{I}_c = \;= \frac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 21{,}06\underline{/81{,}67^{\circ}}$$

En cuanto a las tensiones, con respecto a tierra, y por lo tanto con respecto a los neutros, serán:

$$\mathbf{U}_{a'} = 0$$

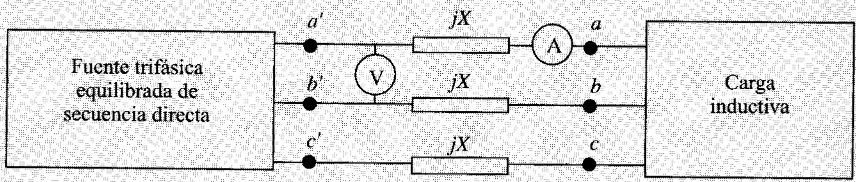
$$\mathbf{U}_{b'} = \mathbf{Z}_c \cdot \mathbf{I}_b = 10\underline{/36{,}87} \cdot 21{,}06\underline{/-158{,}33^{\circ}} = 210{,}6\underline{/-121{,}46^{\circ}}$$

$$\mathbf{U}_{c'} = \mathbf{Z}_c \cdot \mathbf{I}_c = 10\underline{/36{,}87} \cdot 21{,}06\underline{/81{,}67^{\circ}} = 210{,}6\underline{/118{,}54^{\circ}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1. En el sistema trifásico equilibrado representado en la figura, las lecturas de los aparatos medida son: voltímetro $V = 400$ V; amperímetro $A = 10$ A. La potencia activa suminis da por la fuente (ideal) es de 5500 W y la línea que une la fuente con la red es purame inductiva de reactancia $X = 2\ \Omega$. Determínese:

1. Potencia activa, reactiva y aparente consumida por la carga.
2. La impedancia por fase de la carga (módulo y argumento), si ésta está formada p tres impedancias conectadas en triángulo.
3. El valor de la batería de condensadores, conectados en triángulo, que es necesario p ner en los bornes *abc* para que el factor de potencia del conjunto carga-batería de co densadores sea puramente resistivo ($f = 50$ Hz).
4. La potencia activa y reactiva generadas por la fuente con la batería de condensado (calculada en el apartado anterior) conectada.

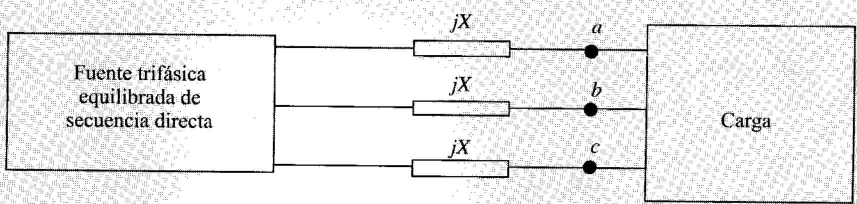


SOLUCIÓN

1. $P_c = 5.500$ W; $Q_c = 3613$ VAr; $S_c = 6.580{,}56$ VA.
2. $\mathbf{Z}_\Delta = 55 + j36{,}13 = 65{,}8\angle 33{,}3^\circ$ (Ω).
3. $C_\Delta = 26{,}56\ \mu$F.
4. $P_g = 6.061{,}6$ W; $Q_g = 461{,}8$ VAr.

3.2. El dibujo representa un sistema trifásico equilibrado. La carga está formada por tres impedancias de valor $Z = 9 + j6$ conectadas en triángulo. La línea que une la fuente y la carga es puramente inductiva y su reactancia es de $X = 2\ \Omega$. La tensión de línea en la fuente es de 400 V. Determínese:

1. Factor de potencia de la carga.
2. Potencia activa y reactiva consumidas por la carga y generadas por la fuente. Realícese un balance de potencias del circuito.
3. Valor eficaz de la tensión de línea en la carga.
4. El valor de la batería de condensadores, conectados en triángulo, que es necesario conectar en los bornes *abc* para que el conjunto carga-batería de condensadores tenga un factor de potencia de 0,9 inductivo ($f = 50$ Hz).



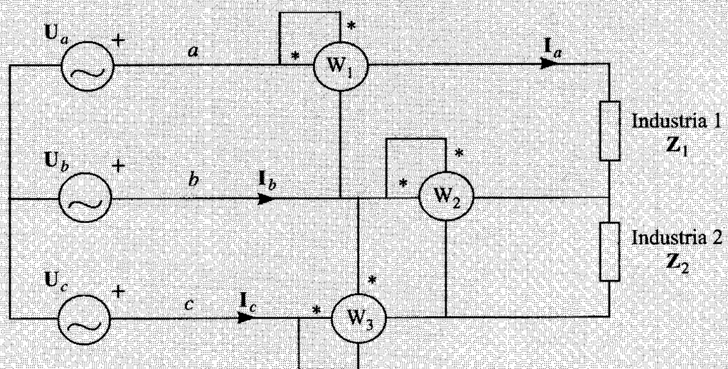
SOLUCIÓN

1. $\cos \varphi = 0{,}832$.
2. $P_c = 19.200$ W; $Q_c = 12.800$ VAr; $\Delta Q_L = 12.800$ VAr; $P_g = 19.200$ W; $Q_g = 25.600$ VAr. $P_g = P_c$; $Q_g = Q_c + \Delta Q_L$.
3. $U = 288{,}45$ V.
4. $C_\Delta = 44{,}65$ μF.

3.3. Dos industrias 1 y 2 tienen unas cargas de impedancia $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$, respectivamente, que se hallan unidas como indica la figura, mediante tres conductores de impedancia despreciable a los tres bornes *abc* de una fuente trifásica de 80 V de tensión fase-neutro y de 50 Hz, equilibrada y de secuencia directa.

La lectura del vatímetro W_1 es de 980 W. Sabiendo que $\mathbf{Z}_1$ tiene caracter inductivo y que su componente resistiva es igual a su componente reactiva, y que $\mathbf{Z}_2$ es capacitiva pura de valor 12,6 Ω, calcular:

1. Las tensiones, en módulo y argumento, aplicadas a las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.
2. Las intensidades $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$, en módulo y argumento.
3. Las lecturas de los vatímetro W_2 y W_3.
4. El valor del condensador que debería utilizar la industria 1 para compensar la potencia reactiva que consume, e indicar dónde deberá conectarlo.



Nota: tómese como origen de fases la tensión $\mathbf{U}_a$.

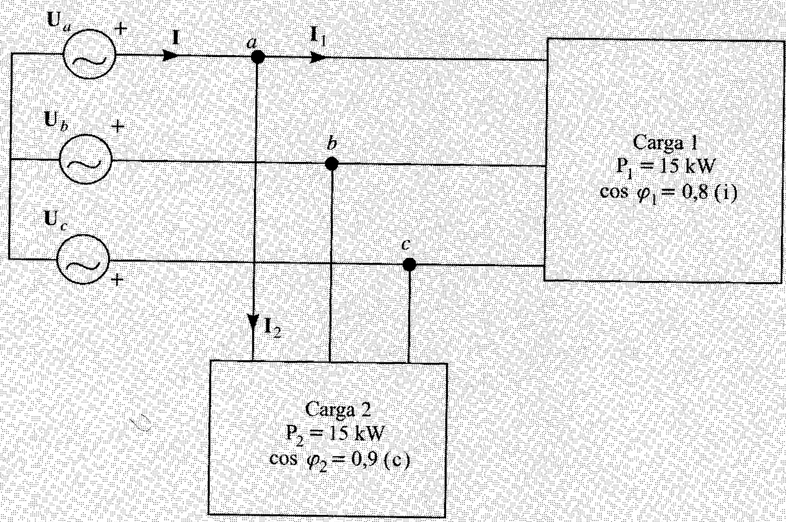
SOLUCIÓN

1. $\mathbf{U}_{ab} = 138{,}56\angle 30^\circ$; $\mathbf{U}_{bc} = 138{,}56\angle -90^\circ$.
2. $\mathbf{I}_a = 10\angle 15^\circ$; $\mathbf{I}_b = 2{,}91\angle 62{,}6^\circ$; $\mathbf{I}_c = 11\angle 180^\circ$.
3. $W_2 = 0$ W; $W_3 = -358$ W.
4. El condensador se coloca en paralelo con $\mathbf{Z}_1$, $C = 162$ μF.

3.4. El dibujo representa un sistema trifásico equilibrado. La Carga 1 está formada por tres impedancias de valor $\mathbf{Z}_1$ conectadas en estrella que consumen una potencia activa de 15 kW con un factor de potencia 0,8 inductivo. La Carga 2 está formada por tres impedancias de valor $\mathbf{Z}_2$, conectadas en triángulo, que consumen una potencia activa de 5 kW con factor de potencia de 0,9 capacitivo.

Calcúlese:

1. El valor de las corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}$ en módulo y argumento.
2. El valor de las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.
3. El valor de la batería de condensadores, conectada en triángulo, que es necesario p ner en los puntos a, b y c para que el factor de potencia del conjunto carga-conde dores sea:
   a) 0,95 inductivo.
   b) 0,95 capacitivo.
4. El consumo de potencia activa y reactiva de las cargas 1 y 2 con la batería de cond sadores conectada.



Datos: $\mathbf{U}_a = 400/\sqrt{3}\underline{/0^\circ}$; frecuencia $f = 50$ Hz.

SOLUCIÓN

1. $\mathbf{I}_1 = 27{,}06\underline{/-36{,}87^\circ}$; $\mathbf{I}_2 = 8{,}02\underline{/25{,}84^\circ}$; $\mathbf{I} = 31{,}55\underline{/-23{,}81^\circ}$.
2. $\mathbf{Z}_1 = 8{,}53\underline{/36{,}90^\circ}$; $\mathbf{Z}_2 = 86{,}35\underline{/-25{,}82^\circ}$.
3. **a)** $C = 15\ \mu$F; **b)** $C = 102\ \mu$F.
4. $P_1 = 15$ kW; $Q_1 = 11{,}25$ kVAr; $P_2 = 5$ kW; $Q_2 = -2{,}42$ kVAr.

3.5. Una fuente ideal trifásica de tensión proporciona una tensión de línea de 3 kV. A ella hay conectadas dos cargas C_1 y C_2, equilibradas, que consisten cada una de ellas en tres impedancias con las siguientes características:

Carga	*P* (kW)	*Q* (kVAr)	Conexión
C_1	21	16	Estrella
C_2	35	17	Triángulo

Calcúlese:

1. El valor de las impedancias por fase que constituyen cada una de las cargas.
2. La corriente de línea absorbida por cada una de las cargas, y la que proporciona la fuente, en módulo y argumento.

3. La potencia que consumirían estas impedancias si la tensión de la fuente decreciese a 2,9 kV de línea.
4. En la carga C_2 desaparece la fase *b-c* de la impedancia, con lo que queda esta fase a circuito abierto. Señálense cuáles serían las corrientes (en módulo y argumento) que circularían por esta carga, y las que proporcionaría la fuente. La tensión de línea de la fuente es de 3 kV.

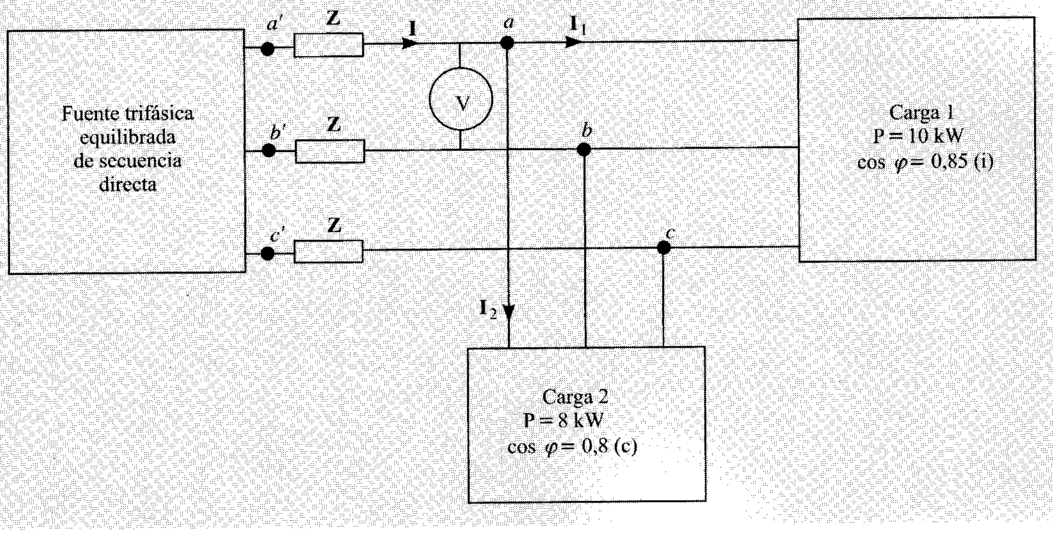
Nota: tómese como origen de fases la tensión fase-neutro de la fase '*a*' de la fuente ideal de tensión.

SOLUCIÓN

1. $\mathbf{Z}_1 = 271{,}2 + j206{,}6 = 340{,}9\underline{/37{,}3^\circ}$; $\mathbf{Z}_2 = 624{,}2 + j303{,}1 = 693{,}9\underline{/25{,}9^\circ}$.
2. $\mathbf{I}_1 = 5{,}1\underline{/-37{,}3^\circ}$; $\mathbf{I}_2 = 7{,}5\underline{/-25{,}9^\circ}$; $\mathbf{I} = 12{,}5\underline{/-30{,}5^\circ}$.
3. $P_1' = 19{,}62$ kW; $Q_1' = 14{,}95$ kVAr; $P_2' = 32{,}71$ kW; $Q_2' = 15{,}88$ kVAr.
4. $\mathbf{I}_{2a} = 7{,}48\underline{/-25{,}9^\circ}$; $\mathbf{I}_{2b} = 4{,}32\underline{/-175{,}9^\circ}$; $\mathbf{I}_{2c} = 4{,}32\underline{/124{,}1^\circ}$; $\mathbf{I}_a = 12{,}5\underline{/-30{,}5^\circ}$; $\mathbf{I}_b = 9{,}28\underline{/-165{,}8^\circ}$; $\mathbf{I}_c = 8{,}92\underline{/104{,}1^\circ}$.

3.6. El dibujo representa una sistema trifásico equilibrado. La Carga 1 está formada por tres impedancias de valor $\mathbf{Z}_1$ conectadas en triángulo, que consumen una potencia activa de 10 kW con un factor de potencia 0,85 inductivo, y la Carga 2, por tres impedancias de valor $\mathbf{Z}_2$, conectadas en estrella, que consumen una potencia activa de 8 kW con factor de potencia de 0,8 capacitivo. El voltímetro señala una tensión de 300 V. El valor de la impedancia de línea es $\mathbf{Z} = 0{,}1 + j0{,}3$. Determínese:

1. El valor eficaz de las corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}$.
2. El valor de las impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$.
3. La tensión de línea en la fuente de alimentación.
4. El valor de la batería de condensadores, conectados en triángulo, que es necesario poner en $a'b'c'$ para que la fuente no consuma ni genere potencia reactiva ($f = 50$ Hz).
5. El consumo de potencia activa y reactiva de las cargas 1 y 2, y de la impedancia $\mathbf{Z}$ con la batería de condensadores conectada.

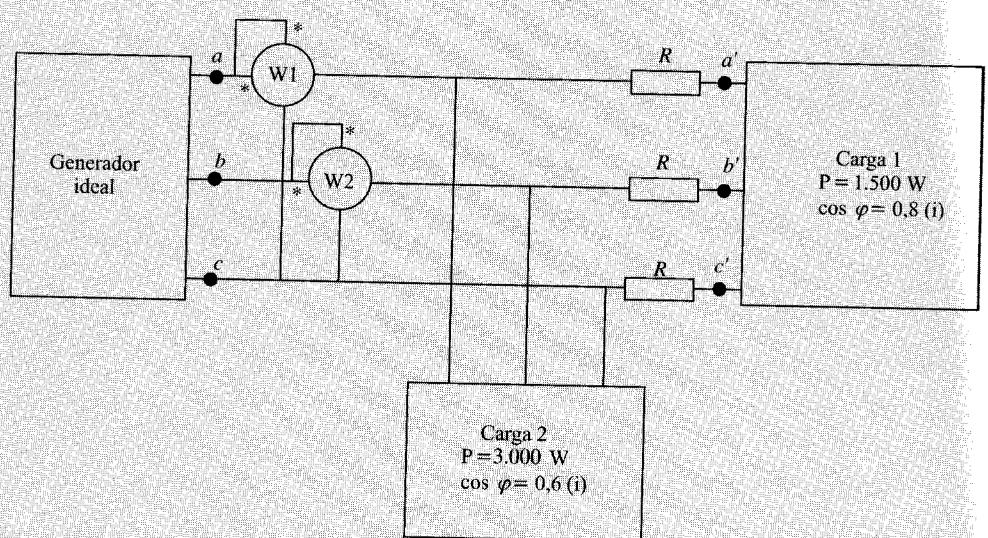


SOLUCIÓN

1. $I_1 = 22{,}6$ A; $I_2 = 19{,}2$ A; $I = 34{,}6$ A.
2. $\mathbf{Z}_1 = 19{,}5 + j12{,}1$; $\mathbf{Z}_2 = 7{,}2 - j5{,}4$.
3. $U_g = 307{,}1$ V.
4. $C = 14{,}3\ \mu$F.
5. Lo mismo que sin la batería de condensadores: $P_1 = 10$ kW; $Q_1 = 6{,}197$ kVAr; $P_2 = 8$ kW; $Q_2 = -6$ kVAr; $P_Z = 359$ W; $Q_Z = 1077$ VAr.

3.7. El circuito de la figura muestra un sistema trifásico en el que el generador ideal proporc na un sistema de tensiones de línea de 380 V, equilibrado y de secuencia directa. Las cargas son inductivas y sus datos se indican en la figura. Frecuencia $f = 50$ Hz. Calcúle

1. El valor de la resistencia R para que la tensión de línea en $a'b'c'$ sea de 360 V.
2. Las lecturas de los vatímetros W_1 y W_2.
3. La capacidad de la batería de condensadores, conectados en triángulo en abc, neces rios para corregir el factor de potencia del conjunto a 0,95 inductivo.



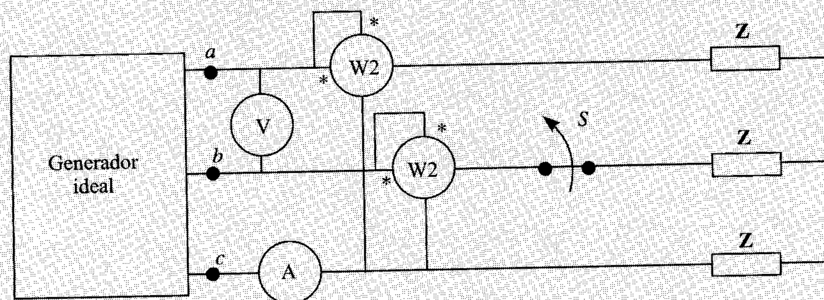
SOLUCIÓN

1. $R = 4{,}544\ \Omega$.
2. $W_1 = 3.790{,}81$ W; $W_2 = 831{,}89$ W.
3. $C = 26{,}49\ \mu$F.

3.8. En la figura las tres impedancias son iguales, de valor $\mathbf{Z} = 5(1 + j\sqrt{3})$, y están alimentadas por un sistema trifásico de tensiones equilibradas de secuencia directa de 220 V de tensión de línea. Determínese:

1. La lectura de los aparatos de medida y potencias activa y reactiva consumidas por la carga con el interruptor S cerrado.
2. Calcular las lecturas de los aparatos de medida en régimen permanente cuando se abre el interruptor S, si las tensiones en la fuente no experimentan ninguna variación.

3. La capacidad de la batería de condensadores en triángulo que hay que conectar en paralelo con las impedancias (con el interruptor S cerrado), para que el factor de potencia del conjunto carga-condensadores sea de 0,95 inductivo.



SOLUCIÓN

1. Voltímetro = 220 V; amperímetro = 12,7 A; vatímetro W_1 = 2.420 W; vatímetro W_2 = 0 W; P = 2.420 W; Q = 4.191,56 VAr.

2. Voltímetro = 220 V; amperímetro = 11 A; vatímetro W_1 = 2.096 W; vatímetro W_2 = 0 W.

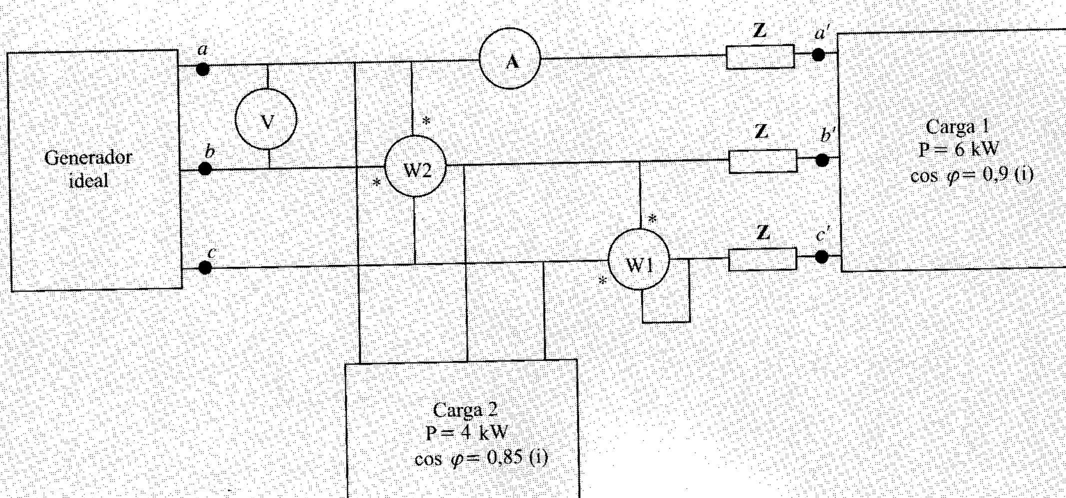
3. C = 223 μF.

3.9. El circuito de la figura muestra un sistema trifásico en el que el generador ideal proporciona un sistema de tensiones de línea equilibrado y de secuencia directa de 50 Hz de frecuencia. El amperímetro señala 10 A. Las dos cargas son inductivas y $\mathbf{Z} = 1 + j3$ (Ω). Calcúlese:

1. Tensión señalada por el voltímetro.

2. Valor de la batería de condensadores, conectada en triángulo, que dispuestos en $a'b'c'$ compensan el factor de potencia del conjunto a 0,9 capacitivo.

3. Lectura de los vatímetros W_1 y W_2.



SOLUCIÓN

1. $U = 425$ V.
2. $C = 66{,}19\ \mu$F.
3. $W_1 = -4.249{,}2$ W; $W_2 = -3.630{,}4$ W.

3.10. Un horno eléctrico trifásico equilibrado está formado por tres resistencias en triángulo. **C**nectado a su tensión nominal de línea de 2kV, el horno disipa una potencia de 2 **MW.** se conecta a una fuente ideal de tensión de línea de 2 kV a través de una línea **trifásica** impedancia $\mathbf{Z}_L = 0{,}1 + j0{,}33\ \Omega$, calcular:

1. La tensión de línea en bornes del horno y la tensión en las impedancias $\mathbf{Z}_L$ en **est** condiciones.
2. Las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por el horno y la línea.
3. El valor de la batería de condensadores que hay que colocar en triángulo, en **parale** con la fuente ideal, para que el factor de potencia del conjunto línea-horno **sea** unidad.

Nota: frecuencia $f = 50$ Hz.

SOLUCIÓN

1. $U = 1.885$ V.
2. $P_H = 1{,}78$ MW; $Q_H = 0$; $S_H = 1{,}78$ MVA; $\Delta P_L = 88{,}88$ kW; $\Delta Q_L = 266{,}63$ kVAr; $\Delta S_L = 281$ kVA.
3. $C_\Delta = 77{,}46\ \mu$F.

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1. Dos cargas trifásicas están conectadas en paralelo y sus datos son: Carga 1: $P_1 = 200$ W, $\cos\varphi_1 = 0{,}8$ inductivo. Carga 2: $P_2 = 300$ W. La alimentación la realiza una fuente trifásica de tensión equilibrada que suministra una corriente de línea de 5 A, con factor 0,9 inductivo, a través de una línea de impedancia $\mathbf{Z} = 1 + j2\ \Omega$ por fase. Indíquese el valor eficaz de la corriente de línea que absorbe la carga 2.

SOLUCIÓN

$$I_2 = 2{,}91 \text{ A}$$

3.2. Indíquese la inductancia por fase de tres bobinas, conectadas en estrella, que es necesario conectar en paralelo con tres condensadores de 9 μF, conectados en triángulo, para que la impedancia por fase del conjunto sea máxima.

SOLUCIÓN

$$L = 0{,}375 \text{ H}$$

3.3. Dos cargas trifásicas en estrella están conectadas en paralelo. La carga 1 tiene una admitancia por fase $\mathbf{Y}_1 = 0{,}05 + j0{,}05$ (S). La carga 2 tiene una admitancia por fase $\mathbf{Y}_2 = 0{,}15 + j0{,}15$ (S). La tensión de línea de alimentación de ambas cargas es de 200 V. A partir del circuito monofásico equivalente, determínese el valor eficaz de la intensidad de línea que absorbe el conjunto formado por el paralelo de las dos cargas.

SOLUCIÓN

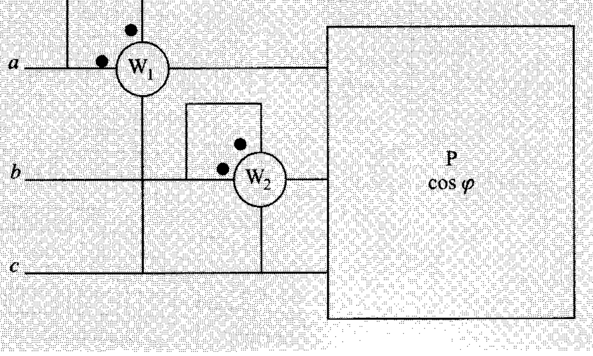
$$I = 25{,}82 \text{ A}$$

3.4. Una carga trifásica consume una potencia aparente de 1732 VA, con una intensidad de línea de 20 A de valor eficaz. Calcúlese el valor máximo de la tensión de línea en la carga.

SOLUCIÓN

$$U_o = 70{,}71 \text{ V}$$

3.5. Determínense las lecturas de W_1 y W_2. $P = 12$ kW, $\cos\varphi = 0{,}9$ (i).



SOLUCIÓN

$$W_1 = 7{,}68 \text{ kW};\ W_2 = 4{,}32 \text{ kW}$$

3.6. En un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa, la tensión fase-neutro en la fase 'a' es $u_a(t) = 120 \cos 100\pi t$. Hállese la tensión $u_{bc}(t)$.

SOLUCIÓN

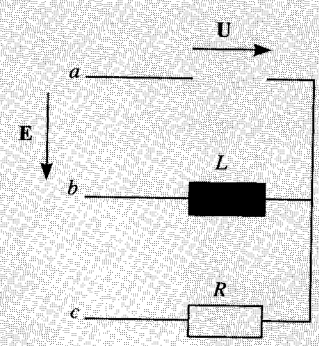
$$u_{bc}(t) = 207{,}85 \cos(100\pi t - \pi/2)$$

3.7. En una carga trifásica equilibrada, conectada en triángulo, alimentada por un sistema de tensiones trifásicas equilibradas de secuencia directa, y de valor de línea 100 V, se absorbe una corriente de línea de 10 A. Si se mide la potencia absorbida utilizando el método de los dos vatímetros, la lectura de ambos vatímetros es la misma. Determínese el valor de la potencia instantánea consumida por la fase *b-c*, y la potencia instantánea trifásica. Tómese como origen de fases la tensión de la fase *a-b*.

SOLUCIÓN

$$p_{bc}(t) = \frac{1.000}{\sqrt{3}}(1 + \cos(200\pi t - 2\pi/3)); \; p(t) = 1000\sqrt{3} \text{ W}$$

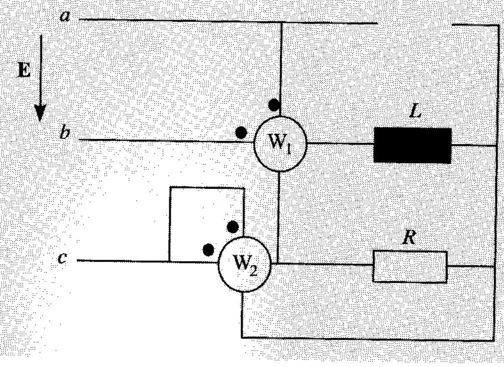
3.8. El circuito de la figura está alimentado por un sistema de tensiones de línea trifásico equilibrado. Determínese la secuencia de fases si el valor eficaz de la tensión U es mayor que el de la tensión de línea de alimentación E.



SOLUCIÓN

Secuencia directa.

3.9. El circuito de la figura está alimentado por un sistema de tensiones de línea trifásico equilibrado de secuencia directa. Determínense las lecturas de los vatímetros W_1 y W_2 si $R = 10\ \Omega$, $L = 50$ mH, $E = 220$ V y $f = 50$ Hz.



SOLUCIÓN

$$W_1 = 1.396{,}87 \text{ W}; \; W_2 = -2.598 \text{ W}$$

3.10. Tres impedancias de valor $\mathbf{Z} = 2 + j3$ están conectadas en estrella. Indíquese el valor de la batería de condensadores conectados en triángulo que, en paralelo con las impedancias, haga que el factor de potencia del conjunto sea de 0,95 capacitivo.

SOLUCIÓN

$$C_\Delta = 191 \; \mu\text{F}$$

CAPÍTULO 4

RÉGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

4.1. EXPRESIÓN DE LA CORRIENTE EN CIRCUITOS *R-L*

Los circuitos que se van a estudiar en este capítulo son circuitos con un solo elemento dinámico. El resto del sistema estará representado por su equivalente Thévenin, que será necesariamente resistivo. Se estudiarán circuitos *R-L*, y circuitos *R-C*.

Los circuitos *R-L*, por tanto, se podrán representar como:

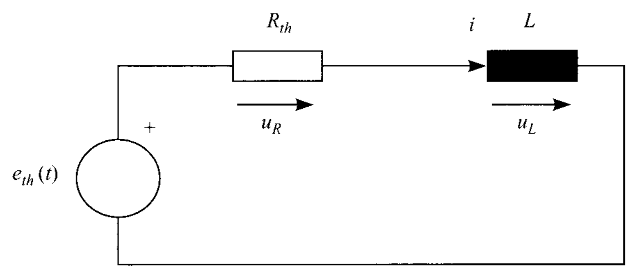


Figura 4.1.

La corriente que circula por la bobina es la que describe el comportamiento del circuito, y a partir de la cual se pueden obtener las restantes magnitudes. Se denomina *variable de estado* del circuito. La expresión de la corriente que circula por la bobina en función del tiempo es:

$$e_{th}(t) = R_{th} \cdot i + L\frac{di}{dt}$$

Su solución proporciona la expresión de la corriente que circula por la bobina en función del tiempo, i, que tiene la expresión siguiente:

$$i(t) = i_{\infty}(t) + (i(t_o) - i_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

$i(t_o)$ es el valor de la corriente en un instante, t_o.

El término $i_{\infty}(t)$ es la expresión de la corriente en régimen permanente e $i_{\infty}(t_o)$ es el valor de esta función en el instante $t = t_o$.

τ es la *constante de tiempo* del circuito, cuya expresión viene dada por:

$$\tau = \frac{1}{R_{th}}$$

4.2. EXPRESIÓN DE LA TENSIÓN EN LOS CIRCUITOS *R-C*

En cuanto a los circuitos *R-C*, se representarán como un equivalente Norton al que se ha conectado un condensador, tal como se muestra en la Figura 4.2:

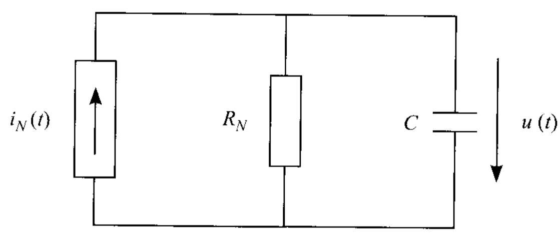


Figura 4.2.

En este caso es la tensión la variable de estado del circuito. Suponiendo conocida la tensión para un instante t_o, la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito es:

$$i_N(t) = \frac{u}{R_N} + C\,\frac{du}{dt}$$

La solución de esta ecuación proporciona la expresión temporal de la tensión en el condensador, que es la reflejada a continuación.

$$u(t) = u_{\infty}(t) + (u(t_o) - u_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

$u_{\infty}(t)$ es la tensión en el condensador en régimen permanente y $u_{\infty}(t_o)$ es el valor de la tensión en el instante $t = t_o$.

La constante de tiempo de este circuito viene dada por:

$$\tau = R_N C$$

Estas expresiones se pueden escribir de forma general:

$$f(t) = f_{\infty}(t) + (f(t_o) - f_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

Donde f es la tensión en los circuitos *R-C* de primer orden, o la corriente en los circuitos *R-L* de primer orden, $f(t_o)$ es el valor de la magnitud en un instante cualquiera t_o, $f_{\infty}(t)$ es su expresión en régimen permanente (o estado estacionario), y $f_{\infty}(t_o)$ es el valor de esta función para el instante t_o.

4.3. ANÁLISIS SISTEMÁTICO DE TRANSITORIOS DE PRIMER ORDEN

La fórmula anterior indica que el valor de la solución de la ecuación homogénea decrece con el tiempo de forma exponencial, y que, después de transcurrido un tiempo infinito, el comportamiento del circuito viene dado por la solución particular.

Cuando el valor de la solución de la ecuación homogénea se considera despreciable, se dice que el circuito se encuentra en régimen permanente, que se denomina igualmente *estado estacionario*. En caso contrario, se dice que el circuito se encuentra en régimen transitorio. La rapidez con la que se alcanza el régimen permanente depende de la constante de tiempo que afecta a la exponencial de la solución de la homogénea; cuanto menor sea dicha constante, más rápidamente decaerá la solución de la homogénea, y por lo tanto se estará antes más cerca del régimen permanente.

En los circuitos eléctricos las constantes de tiempo son pequeñas (del orden de los milisegundos), y por tanto, la mayor parte del tiempo el circuito se considera que se está en régimen permanente. El régimen transitorio sólo será importante en los instantes siguientes a algún cambio. Este cambio puede ser una modificación de la topología del circuito (por ejemplo, debido a un accidente), o bien una maniobra como la conexión o la desconexión de un circuito. Suponiendo que esta maniobra o cambio en el circuito se efectúe en el instante $t = 0$, el instante previo a la maniobra se denominará $t = 0^-$, en tanto que el inmediatamente posterior se llamará $t = 0^+$.

A partir de las expresiones de la corriente y de la tensión en circuitos inductivos y capacitivos, respectivamente, se deduce que para conocer el comportamiento de los circuitos de primer orden se necesita determinar una serie de parámetros:

1. Constantes de tiempo: su determinación es muy sencilla, pues basta hallar el equivalente Thévenin del circuito con respecto al elemento dinámico correspondiente, y aplicar la fórmula adecuada.
2. Solución particular o solución en régimen permanente: en una gran parte de los casos las excitaciones son fuentes de corriente continua o de corriente alterna. En este último caso, se puede determinar el estado estacionario mediante técnicas de análisis de alterna. En el caso de fuentes de corriente continua, el tratamiento es distinto, y se describe más adelante.
3. Condiciones iniciales: en ocasiones no se conocen directamente, sino que es necesario deducirlas a partir de otros valores del circuito.

La forma de determinar la solución particular en el caso de excitaciones de corriente continua, y las condiciones iniciales se expone en los siguientes apartados.

• Cálculo del régimen permanente en circuitos con fuentes de corriente continua

La ecuación que define el comportamiento de una bobina es:

$$u = L\frac{di}{dt}$$

Y la de un condensador:

$$i = C\frac{du}{dt}$$

En ambos casos, en el régimen permanente, las tensiones y corrientes son constantes, y por tanto, sus variaciones en el tiempo son nulas. Por esta razón, la tensión en una bobina en un circuito de continua y en régimen permanente será nula, al igual que la corriente en el condensador.

Esto significa que, en régimen permanente y en corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito, en tanto que un condensador se comporta como un circuito abierto. Por tanto, en las condiciones indicadas, se pueden sustituir ambos elementos por cortocircuitos y circuitos abiertos, y resolver el circuito de esta forma.

• Cálculo de condiciones iniciales

Las ecuaciones que definen el comportamiento de la bobina y del condensador son:

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad\qquad i = C\frac{du}{dt}$$

La corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores no pueden variar bruscamente, puesto que esto produciría, respectivamente, una tensión y una corriente infinitas. Esto se puede comprobar observando que la corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores en el instante posterior a una modificación del circuito, $t = 0^+$, vienen dadas por:

$$i(0^+) = i(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0-}^{0+} u(t)\,dt \qquad\qquad u(0^+) = u(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0-}^{0+} i(t)\,dt$$

En la ecuación anterior, las integrales son nulas, salvo que las tensiones y corrientes sean un impulso de Dirac.

Por tanto, se puede establecer que:

1. La tensión en un condensador no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.
2. La corriente en una bobina no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.

Sin embargo, tanto la corriente en los condensadores, como la tensión en las bobinas sí pueden variar bruscamente.

Una vez conocidas las condiciones iniciales en bobinas y condensadores, las condiciones iniciales del resto del circuito se obtendrán sustituyendo los condensadores por fuentes de tensión, y las bobinas por fuentes de corriente, cuyos valores serán las condiciones iniciales de tensión y de corriente.

4.4. OBTENCIÓN DIRECTA DE MAGNITUDES QUE NO SEAN VARIABLES DE ESTADO

La expresión que da el valor de $f(t)$ es válida también para obtener cualquier magnitud en el circuito, si bien hay que tener en cuenta dos cosas:

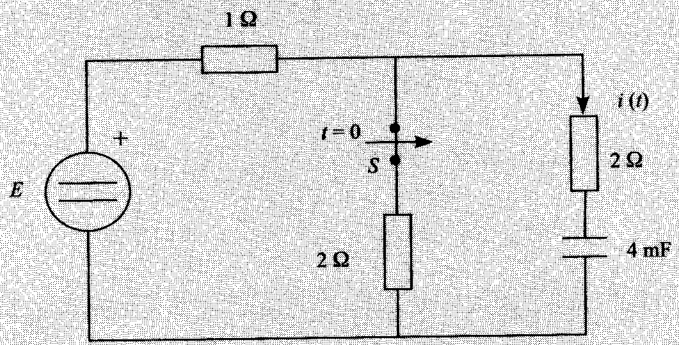
1. Las condiciones iniciales deben ser las de $t = 0^+$, puesto que en las resistencias las corrientes y tensiones sí pueden variar bruscamente, así como las tensiones en bobinas y las corrientes en condensadores.
2. La constante de tiempo es la del elemento dinámico que produzca el transitorio.

Teniendo en cuenta estas salvedades, esta expresión se puede reescribir de la forma siguiente, de un modo más general.

$$f(t) = f_\infty(t) + (f(0^+) - f_\infty(0))\cdot e^{-t/\tau} \tag{3.1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. El interruptor S de la figura, lleva cerrado un tiempo que se puede considerar infinito. En el instante $t = 0$ se abre, permaneciendo en esta posición definitivamente. Calcúlese la expresión de la intensidad $i(t)$ desde $t = 0$ en adelante.

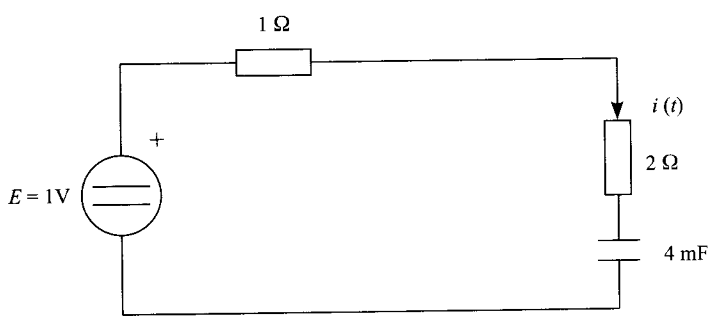


SOLUCIÓN

La expresión de la tensión en el condensador tendrá la forma:

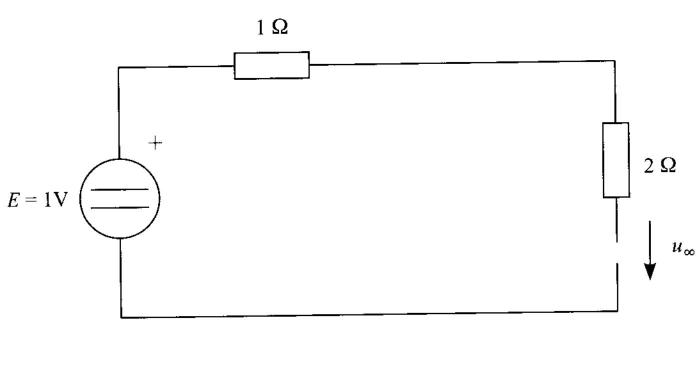
$$i(t) = C\frac{du}{dt} \qquad u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

Cuando el interruptor está abierto, el circuito resultante, en el que se produce el transitorio, será:



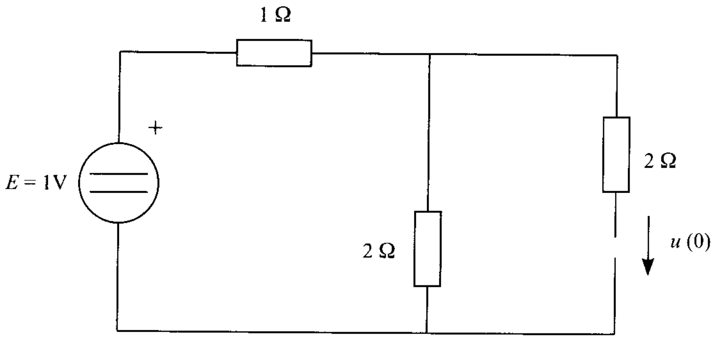
La constante de tiempo tendrá la expresión $\tau = R_{th}C$, y dado que la resistencia Thévenin es la asociación en serie de las dos resistencias, $\tau = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 12$ ms.

En régimen permanente, el comportamiento del circuito se puede representar por un circuito equivalente en el que se ha sustituido el condensador por un circuito abierto, que emula el comportamiento del condensador en estas condiciones.



La tensión en régimen permanente u_∞ coincidirá con la tensión en la fuente, al no circular ninguna corriente por el circuito abierto, esto es, $u_\infty = E = 1$ V.

Para hallar las condiciones iniciales en el condensador, es necesario considerar el circuito existente antes de la maniobra. Puesto que este circuito llevaba en estas condiciones un tiempo infinito, el comportamiento del condensador en ese momento equivale, de nuevo, al de un circuito abierto:



Y por tanto, la tensión en el condensador, un instante antes de que se produzca la maniobra es:

$$u(0^-) = \frac{2}{1+2}\,E = \frac{2}{3}\,E = 2/3 \text{ V}$$

que es la misma que la que tiene en el instante inmediatamente posterior a la apertura del interruptor.

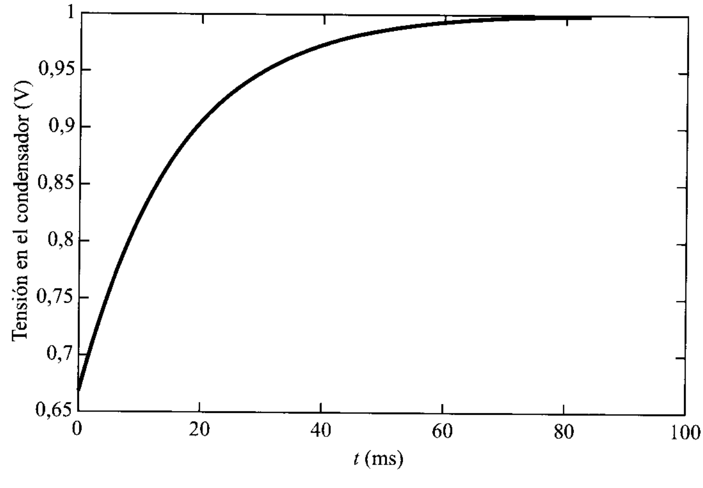
Se introducen todos estos resultados en la expresión general de la tensión del condensador, con lo que se obtiene la expresión:

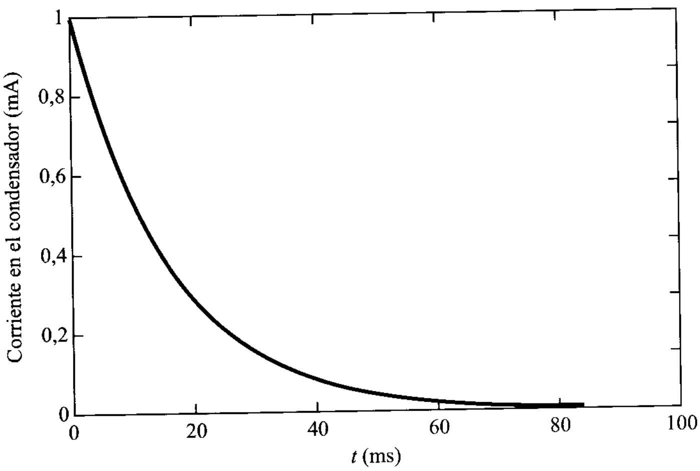
$$u(t) = 1 + \left[\frac{2}{3} - 1\right] e^{-t/\tau} = 1 - \frac{1}{3}\, e^{-t\tau}$$

Para obtener la corriente en el condensador se emplea la relación entre ésta y la corriente:

$$i(t) = C\,\frac{du}{dt} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{1}{4 \cdot 3}\, e^{-t/\tau} = \frac{10^{-3}}{9}\, e^{-t/\tau}$$

A continuación se muestran las evoluciones temporales de la tensión y de la corriente en el condensador:





4.2. Un circuito activo constituido únicamente por fuentes independientes de corriente continua y resistencias tiene dos terminales accesibles A y B. Se sabe que:

- Si entre los terminales A y B se conecta una bobina de 2 mH, circula, en régimen permanente, una corriente de 10 A.
- Si entre los terminales A y B se conecta una resistencia de 8 Ω, la potencia que consume dicha resistencia es de 32 W.

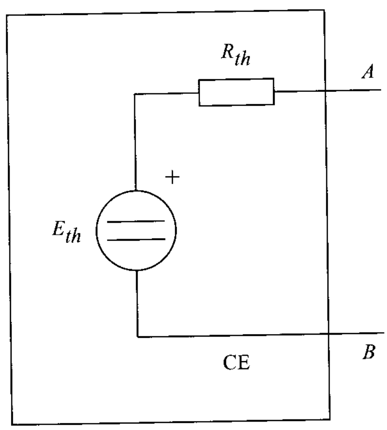
Se pide:

a) Equivalente Thévenin del circuito activo visto entre los terminales A y B.

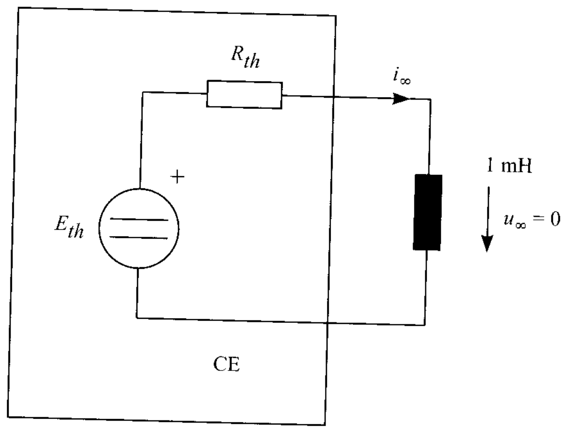
b) Si entre los terminales A y B se conecta un condensador de 5 μF cargado inicialmente a una tensión de 15 V, calcular la expresión de la corriente circulante en el condensador tomando como origen de tiempos el instante de la conexión del condensador.

SOLUCIÓN

Puesto que el circuito sólo consta de fuentes de corriente y continua, se le puede representar por su equivalente Thévenin entre los puntos A y B.



Puesto que es un circuito de continua, la conexión de una bobina entre A y B equivale, en régimen permanente, a un cortocircuito entre A y B, tal como se muestra en la figura siguiente:



Por tanto, la corriente que circula por la bobina será:

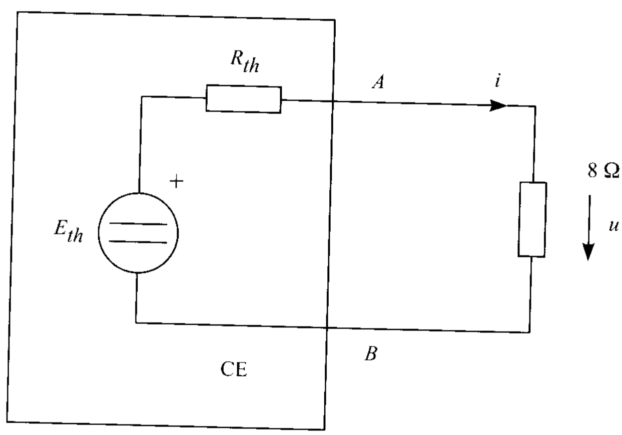
$$i_\infty = E_{th}/R_{th} = 10$$

Por otra parte, si se conecta entre A y B una resistencia de 8 Ω, y ésta consume una potencia de 32 W, la tensión entre los extremos de la resistencia será:

$$u = \sqrt{32 \cdot 8} = 16 \text{ V}$$

Y la corriente, por tanto:

$$i = 16/8 = 2 \text{ A}$$



La relación entre ambas magnitudes estará determinada por los valores del circuito eléctrico. es decir:

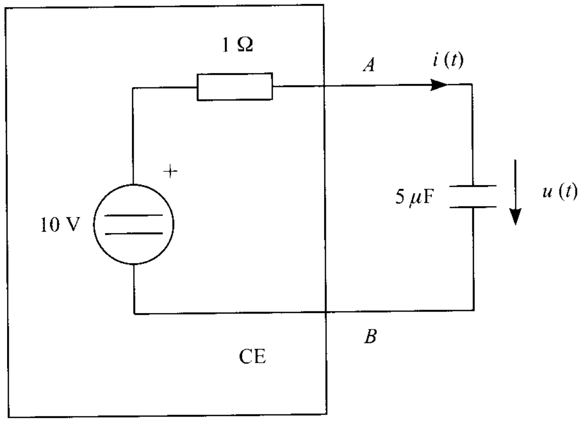
$$E_{th} - R_{th} \cdot 2 = 8$$

Esta ecuación, unida a la anterior, proporciona un sistema en el que se puede obtener E_{th} y R_{th}:

$$E_{th} - R_{th} \cdot 2 = 8$$
$$E_{th} = 10 \cdot R_{th}$$

cuya resolución proporciona los valores $E_{th} = 10$ V, y $R_{th} = 1$ Ω.

Una vez obtenidos estos valores, se puede abordar la resolución de la segunda parte del problema. El circuito resultante será el siguiente:



En primer lugar, se obtendrá la tensión en el condensador. A partir de ella, se deducirá la corriente que circula por él. De esta forma, no es necesario obtener la corriente en $i(0^+)$.

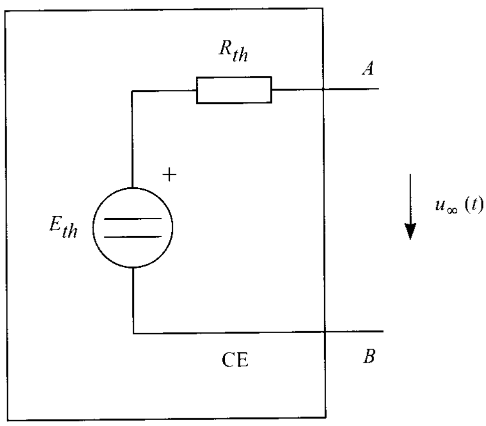
La expresión de la tensión en el condensador tendrá la forma:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

El valor de la tensión inicial es un dato del enunciado, y vale 15 V. En cuanto a la constante de tiempo, se obtiene de forma inmediata, puesto que se conoce el valor de la resistencia del equivalente Thévenin.

$$\tau = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5\ \mu\text{s}$$

En cuanto al valor final, el circuito en régimen permanente, teniendo en cuenta que se trata de un circuito con fuentes de continua, será:



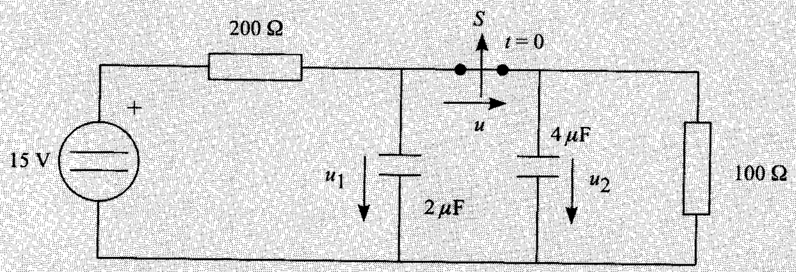
En este caso, la tensión en régimen permanente en el condensador coincide con el valor de la fuente del equivalente Thévenin, es decir, $u_\infty = u_\infty(0) = 10$ V. Por tanto, la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 10 + (15 - 10) \cdot e^{-200.000t} = 10 + 5 \cdot e^{-200.000t}$$

Y la corriente que circula por el condensador será:

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = -5 \cdot 10^{-6} \cdot (5 \cdot 200.000) \cdot e^{-200.000t} = -5 \cdot e^{-200.000t}$$

4.3. El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ se abre **el** interruptor S. Calcular u_1 y u_2 para $t > 0$. Determínese asimismo el valor máximo de u para $t > 0$.

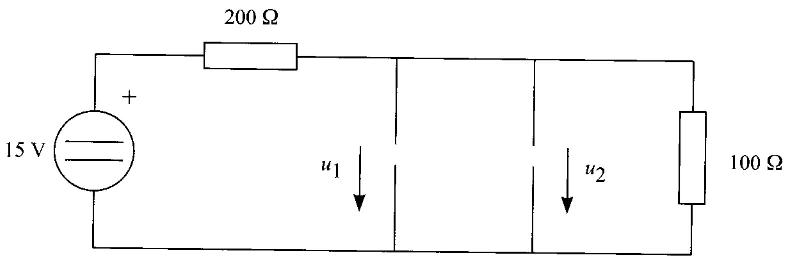


SOLUCIÓN

Puesto que se trata de dos condensadores, las tensiones en ambos vendrán dadas por las expresiones:

$$u_1(t) = u_{1\infty}(t) + [u_1(0) - u_{1\infty}(0)]e^{-t/\tau 1}$$
$$u_2(t) = u_{2\infty}(t) + [u_2(0) - u_{2\infty}(0)]e^{-t/\tau 2}$$

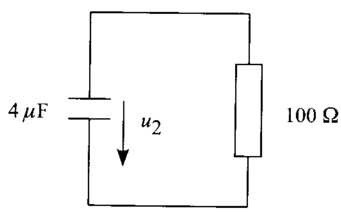
Con respecto a las tensiones iniciales, éstas serán las que tenían antes de que se abriera el interruptor, que serán las mismas, pues, con el interruptor cerrado, los dos condensadores se encuentran en paralelo, en un circuito en régimen permanente; es decir, en ese momento se comportaban como un circuito abierto:



En este caso, la tensión común a ambos condensadores se puede expresar, aplicando la fórmula del divisor de tensión, como:

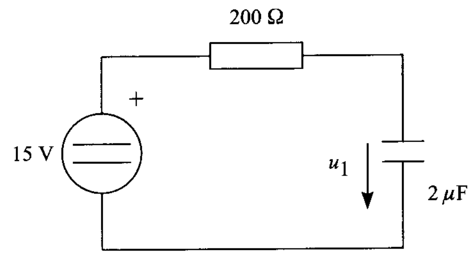
$$u(0) = u_1(0) = u_2(0) = \frac{100}{100 + 200} \cdot 15 = 5 \text{ V}$$

En cuanto a las constantes de tiempo, habrá dos, una en cada circuito. El circuito situado a la derecha del interruptor, tras la maniobra, se convierte en:



cuya constante de tiempo es $\tau_2 = 100 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 0{,}4$ ms.

En cuanto al otro circuito, tras la apertura del interruptor se convierte en:



cuya constante de tiempo es $\tau_1 = 200 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0{,}4$ ms.

Y en cuanto a los regímenes permanentes, la tensión en el circuito de la derecha del interruptor será nula cuando haya transcurrido un tiempo infinito, pues en él no hay fuentes de continua. Por tanto, $u_{2\infty} = 0$.

En el circuito de la izquierda, la tensión en el condensador, después de transcurrido un tiempo infinito tras la maniobra del interruptor será la tensión de la fuente, ya que el condensador se comportará entonces como un circuito abierto:

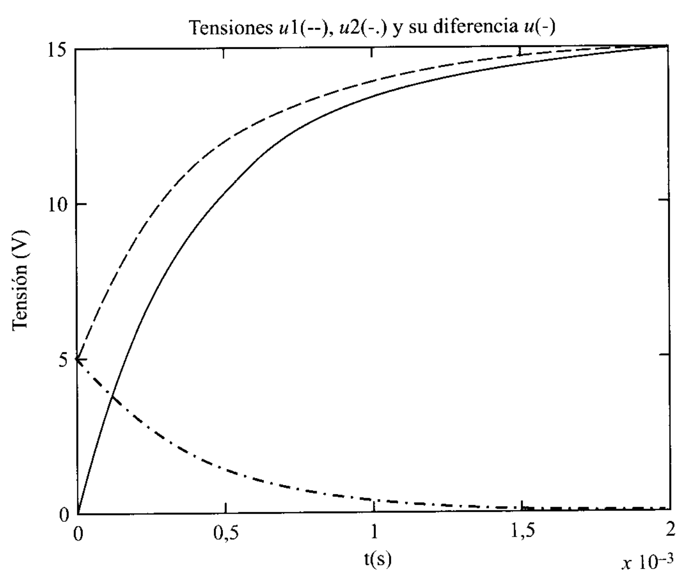
$$u_{1\infty} = 15 \text{ V}$$

Por tanto, las expresiones de las tensiones serán:

$$u_1 = 15 + (5 - 15) \cdot e^{-2.500t} = 15 - 10 \cdot e^{-2.500t}$$

$$u_2 = 5 \cdot e^{-2.500t} = 5 \cdot e^{-2.500t}$$

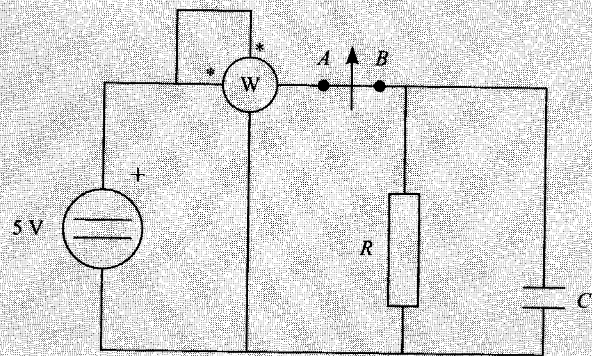
La mayor diferencia entre las tensiones se producirá en el régimen permanente producido tras la maniobra, y será de $u_{\text{máx}} = 15$ V. La evolución de estas tensiones se muestra en la figura siguiente:



4.4. El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Se pide:

a) Determinar R y C sabiendo que el vatímetro indica 25 W y que el condensador almacena una energía de 100 μJ.

b) Expresión de la tensión u_{AB} en bornes del interruptor para $t = 0$ cuando éste se ab
en $t = 0$.



SOLUCIÓN

La potencia que indica el vatímetro es la consumida en la resistencia. Por tanto:

$$P = \frac{e^2}{R} = \frac{25}{R}$$

$$R = \frac{25}{25} = 1\ \Omega$$

En cuanto al condensador, la energía almacenada tiene la expresión:

$$w = \frac{1}{2} Cu^2$$

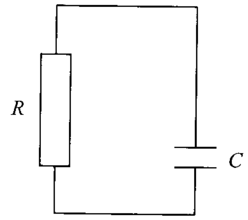
La tensión en el condensador será por consiguiente:

$$C = \frac{2w}{u^2} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{25} = 8\ \mu\text{F}$$

En cuanto a la tensión entre A y B, una vez abierto el interruptor, será la diferencia entre la tensión de la fuente y la del condensador. La tensión de la fuente es constante e igual a 5 V, en tanto que la tensión en el condensador tendrá la expresión:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

Puesto que en el circuito resultante tras la maniobra, que se muestra a continuación, no hay ninguna fuente de tensión que alimente al condensador, su tensión en régimen permanente es nula.



En cuanto a la constante de tiempo, será el producto del valor de la resistencia por el del condensador, es decir $\tau = R \cdot C = 1 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 8\ \mu s$.

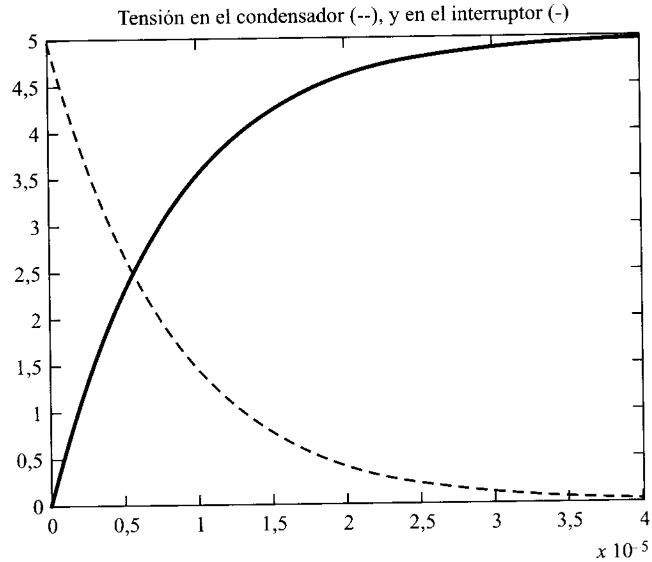
La tensión inicial será la tensión de la fuente, ya que era la tensión aplicada antes de la maniobra, como ya se ha indicado.

Por consiguiente, la tensión en el condensador será:

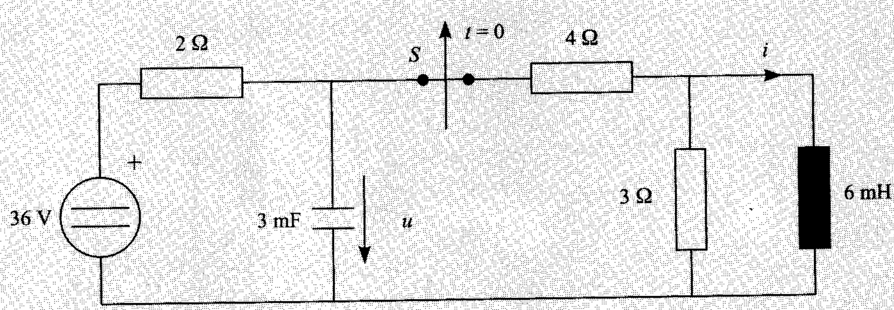
$$u(t) = 5 \cdot e^{-125.000t}$$

Y la tensión entre los dos terminales del interruptor será:

$$u_{AB} = 5 - 5 \cdot e^{-125.000t}$$



4.5. El interruptor S lleva cerrado un tiempo que se considera infinito. En el instante $t = 0$ se abre S y ya permanece en dicha posición definitivamente. Hállese la expresión de $u(t)$ e $i(t)$ para $t \geqslant 0$.

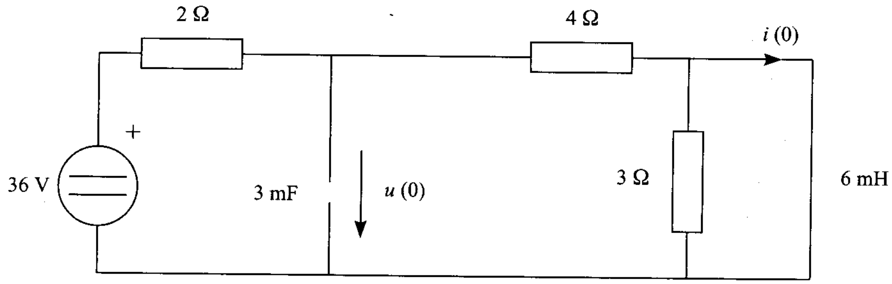


Solución

De nuevo se trata de un circuito con dos elementos dinámicos que, una vez efectuada la maniobra, se convierte en dos circuitos de primer orden. En esta ocasión, las variables tomarán las siguientes expresiones:

$$i(t) = i_{\infty}(t) + [i(0) - i_{\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau 1}$$
$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

Las condiciones iniciales se tendrán que obtener a partir del circuito inicial, con ambos elementos dinámicos representados por sus equivalentes en régimen permanente de continua.



La corriente inicial $i(0)$ tendrá el valor:

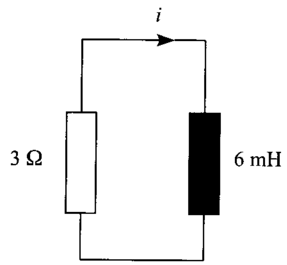
$$i(0) = \frac{36}{2 + 4} = 6 \text{ A}$$

Y la tensión $u(0)$ en el condensador puede obtenerse de la siguiente manera:

$$u(0) = \frac{4}{2 + 4} \cdot 36 = 24 \text{ V}$$

Nótese que, por estar la resistencia de 3 Ω en paralelo con un cortocircuito, la tensión en el condensador es la misma que la que está aplicada en la resistencia de 4 Ω, que por estar en serie con la de 2 Ω puede hallarse mediante la fórmula del divisor de tensión.

Las constantes de tiempo de ambos circuitos se obtendrán de los circuitos resultantes. El circuito de la bobina será:

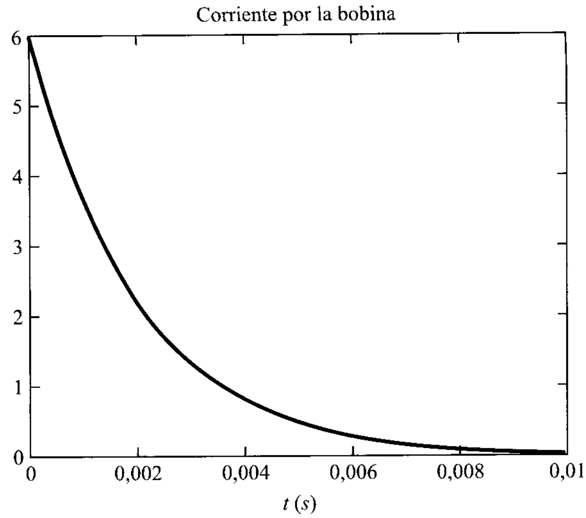


que tiene una constante de tiempo $\tau_1 = 6 \cdot 10^{-3}/3 = 2$ ms. Adviértase que la resistencia de 4 Ω no interviene en este circuito (ni en el del condensador, claro está) puesto que por ella no circula ninguna corriente.

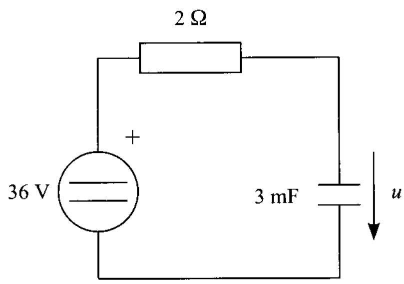
En cuanto al régimen permanente en este circuito, será nulo, ya que no hay ninguna fuente en este circuito.

Por tanto, la expresión de la corriente que circula por la bobina será:

$$i(t) = 6 \cdot e^{-500t}$$



El circuito del condensador, una vez efectuada la maniobra, queda como sigue:

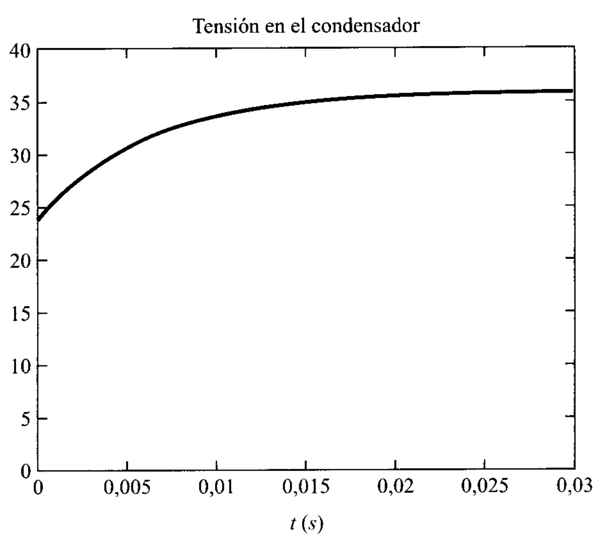


En este circuito, la constante de tiempo será $\tau = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 6$ ms. La tensión en régimen permanente del condensador coincidirá con la tensión en la fuente, es decir, $u_\infty = 36$ V.

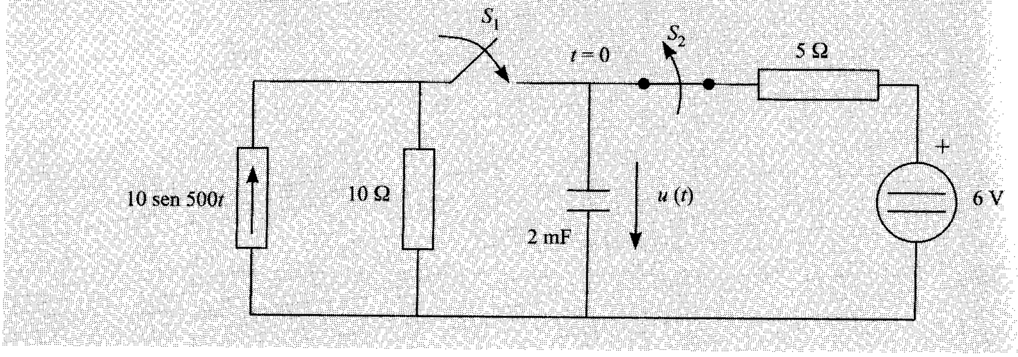
Por tanto, la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 36 + (24 - 36) \cdot e^{-166{,}66t}$$

La evolución de esta tensión se muestra en la figura siguiente:



4.6. El circuito de la figura lleva con los interruptores S_1 y S_2 en la posición indicada un tiempo que puede considerarse infinito. En el instante $t = 0$ se abre el interruptor S_2 y simultáneamente se cierra S_1. Determínese la variación de $u(t)$ para $t > 0$.



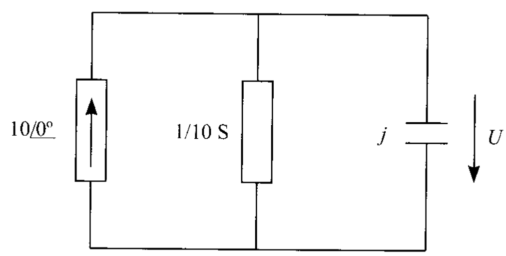
Solución

El único elemento dinámico presente es el condensador. La tensión en el condensador tendrá la expresión:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

El transitorio consta de dos partes: por un lado, el proceso de carga del condensador mediante una fuente de continua, y, una vez terminado, su inserción en un circuito de alterna. Es necesario obtener, tanto el régimen permanente, que es el de un circuito de alterna, como las condiciones iniciales, que provienen de un circuito de continua.

Para resolver el régimen permanente, hay que utilizar las técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna. El circuito resultante que afecta al condensador, una vez que el interruptor S_1 está cerrado, y el S_2 abierto, es el siguiente:



Puesto que se trata de un circuito paralelo, se muestran en la figura las admitancias de los elementos. La tensión en el condensador será:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{I}}{1/10 + j} = \frac{100}{1 + j10} = 9{,}95\underline{/-84^{\circ}}$$

Por tanto, la expresión de la tensión en el dominio del tiempo será:

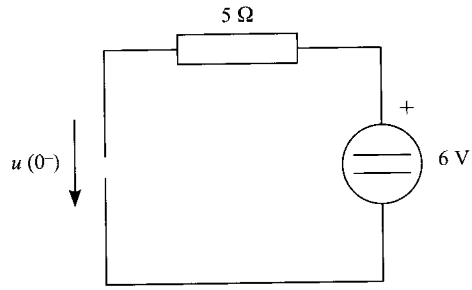
$$u_{\infty}(t) = 9{,}95\,\text{sen}\,(500t - 84 \cdot \pi/180)$$

Y si esta expresión se particulariza para $t = 0$, se obtiene:

$$u_{\infty}(0) = 9{,}95\,\text{sen}\,(-84 \cdot \pi/180) = -9{,}9 \text{ V}$$

La constante de tiempo del circuito será $\tau = R_{th}C = 10 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 20$ ms. En esta constante de tiempo sólo interviene la resistencia de 10 Ω puesto que es la única presente en el circuito de alterna.

Para la obtención de las condiciones iniciales, es preciso acudir al circuito de continua existente antes de la maniobra de los interruptores. Puesto que los interruptores llevaban un tiempo infinito en esa posición, el condensador se comporta como un circuito abierto, al haberse llegado al régimen permanente. La tensión de este condensador es, por tanto, la de la fuente: 6 V.



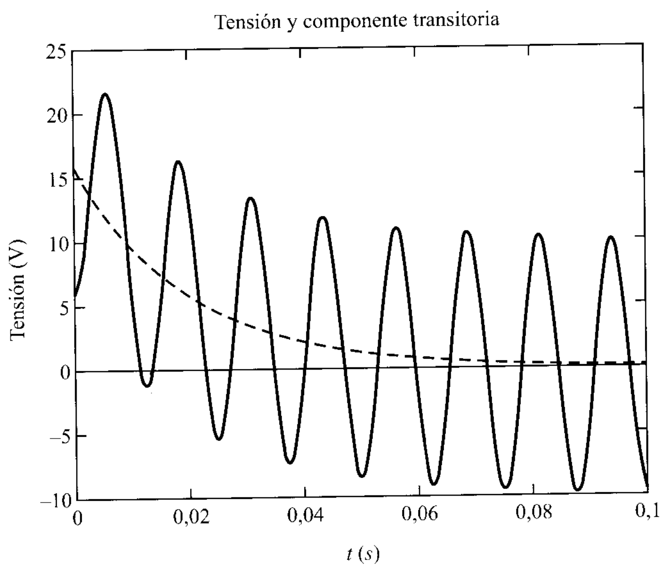
Si se sustituyen todos los valores obtenidos en la expresión de la tensión se llega a la expresión:

$$u(t) = 9{,}95\,\mathrm{sen}\,(500t - 84\pi/180) + (6 + 9{,}9)e^{-t/0{,}02}$$

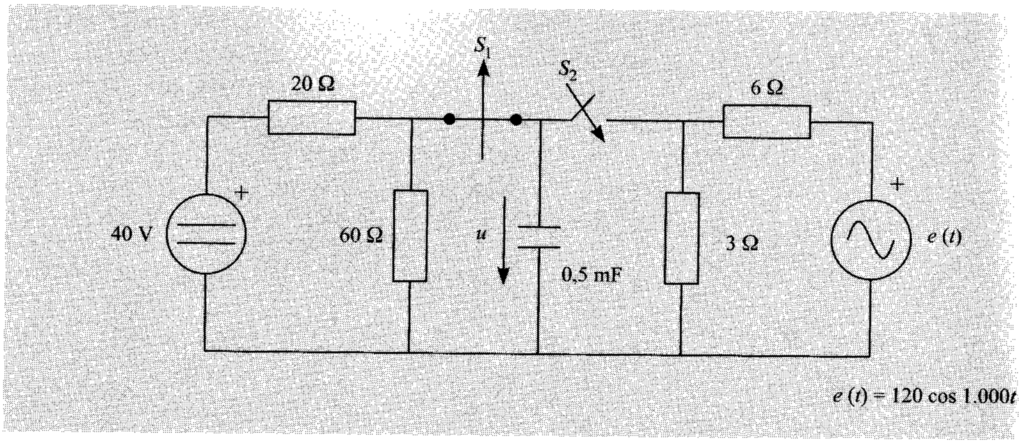
Es decir:

$$u(t) = 9{,}95\,\mathrm{sen}\,(500t - 84\pi/180) + 15{,}9e^{-t/0{,}02}$$

La evolución de esta tensión, junto con la de la componente transitoria se muestra en la figura siguiente.



4.7. En el circuito de la figura el interruptor S_1 está cerrado y el interruptor S_2 está abierto, llevando un tiempo en esta posición que puede considerarse infinito. En el instante $t = 0$ se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2. Calcúlese la expresión de $u(t)$ para $t = 0$.

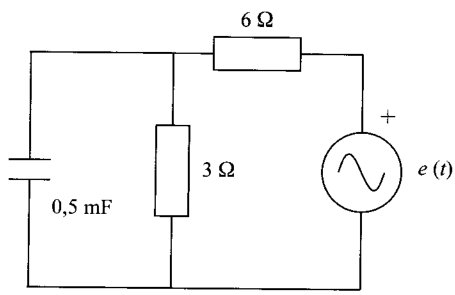


SOLUCIÓN

En este problema, el condensador se carga en un circuito de continua, y una vez cargado, se conecta a un circuito de corriente alterna. De nuevo, la tensión del condensador tendrá la expresión:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

Y el circuito donde se produce el transitorio será el circuito de alterna que se forma tras la maniobra de interruptores, esto es:

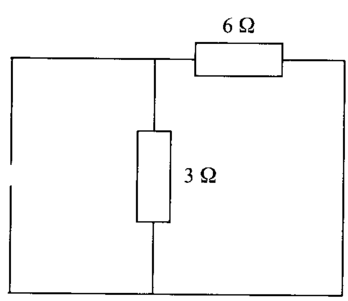


e (t) = 120 cos 1.000t

La constante de tiempo será:

$$\tau = R_{th}C$$

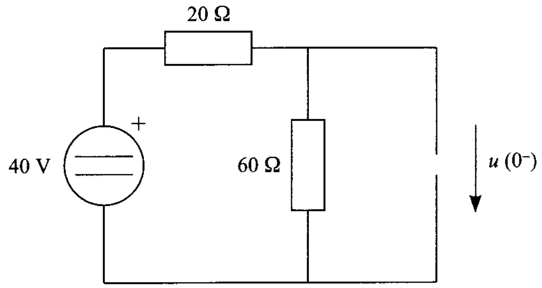
Donde R_{th} es la resistencia Thévenin del circuito de alterna, que se obtiene hallando la resistencia vista desde el condensador en el circuito resultante tras anular la fuente de tensión:



es decir, $R_{th} = 3 \cdot 6 /(3 + 6) = 2\ \Omega$, por lo que la constante de tiempo será

$$\tau = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ ms}$$

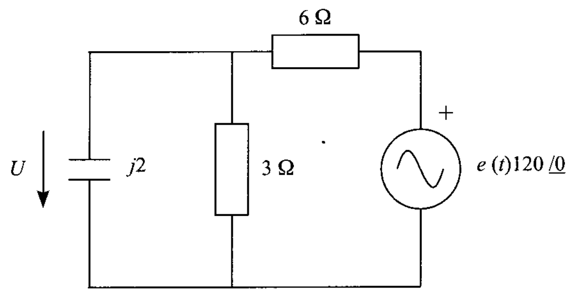
La condición inicial es la tensión en el condensador antes de efectuar la maniobra con los interruptores, que será la tensión que ha adquirido este elemento en el circuito de continua. Puesto que el condensador ha permanecido un tiempo infinito conectado a dicho circuito, se puede considerar que, justo antes de la maniobra, el circuito de continua (con el condensador conectado) está en régimen permanente. Este circuito, por tanto, será equivalente al siguiente:



La tensión en la resistencia de 60 Ω se puede hallar teniendo en cuenta que, con el condensador como un circuito abierto, las dos resistencias están en serie, y se puede utilizar la fórmula del divisor de tensión. Por consiguiente:

$$u(0) = 40 \cdot 60/(20 + 60) = 30 \text{ V}$$

En cuanto a la tensión en régimen permanente, se obtendrá aplicando las técnicas de análisis de alterna al circuito en el que tiene lugar el transitorio. Este circuito, utilizando las técnicas de alterna, será (nótese que en esta ocasión, y por simplicidad, el valor del fasor de tensión asociado se ha escogido igual a la amplitud de la fuente de tensión; puesto que sólo se pretende obtener una tensión, esta solución es perfectamente válida, sin necesidad de hacer ningún cálculo adicional):



La tensión en el condensador se puede obtener aplicando la fórmula del divisor de tensión al paralelo de la resistencia de 3 Ω y del condensador, en serie con la resistencia de 6 Ω. Esto proporciona un valor de tensión:

$$\mathbf{U} = \frac{\dfrac{j2 \cdot 3}{j2 + 3}}{\dfrac{j2 \cdot 3}{j2 + 3}} \cdot 120 = 20 \cdot (1 + j) = 20 \cdot \sqrt{2}\underline{/45^\circ}$$

Por tanto, la expresión de la tensión en el condensador en régimen permanente, en función del tiempo, será:

$$u_\infty(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cos(1.000t + 45 \cdot \pi/180)$$

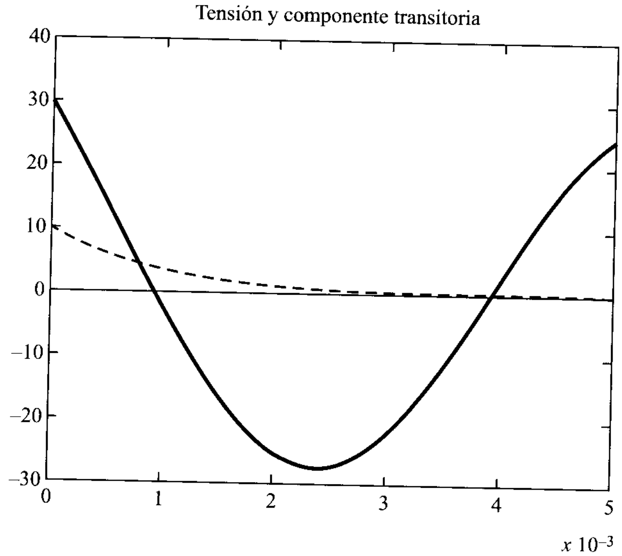
que, particularizada para $t = 0$:

$$u_{\infty}(0) = 20 \cdot \sqrt{2} \cos(45 \cdot \pi/180) = 20 \text{ V}$$

Y, por consiguiente, la tensión en el condensador será:

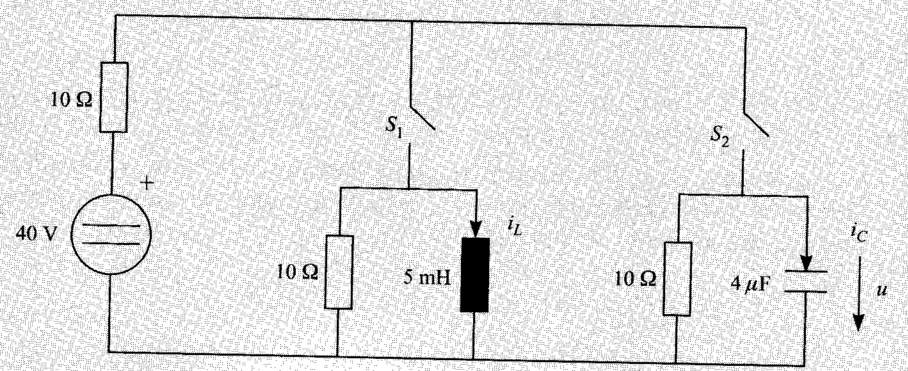
$$u(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cos(1.000t + 45 \cdot \pi/180) + (30 - 20) \cdot e^{-1.000t}$$

En la figura siguiente se representa la evolución temporal de la tensión, y de su componente transitoria.



4.8. En el circuito de la figura, los interruptores S_1 y S_2 se encuentran inicialmente abiertos y los elementos almacenadores de energía descargados. En $t = 0$ se cierra el interruptor S_1, permaneciendo abierto el interruptor S_2. Al cabo de 10 ms, se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2.

Hállense las intensidades $i_L(t)$ y $i_C(t)$ y la tensión $u(t)$ para $t = 0$.



Solución

Puesto que, tanto la bobina como el condensador se encuentran inicialmente descargados, deberán conectarse a la fuente para que la corriente que circula por ellos no sea nula. Se va a estudiar lo que sucede en los intervalos entre los que hay maniobras con los interruptores.

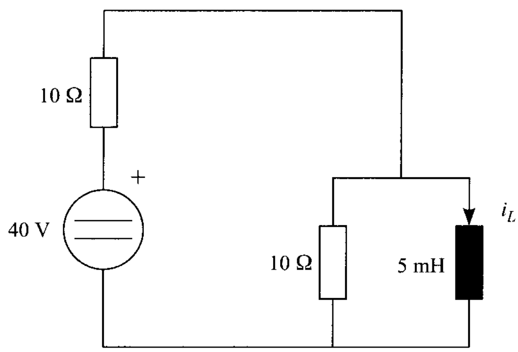
- Intervalo $0 \leqslant t \leqslant 0{,}01$ s

La corriente que circula por el condensador es nula, puesto que aún no se ha cargado.

La bobina, por el contrario, se va cargando, y la corriente evoluciona de acuerdo con la expresión:

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) + [i_L(0) - i_{L\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau 1}$$

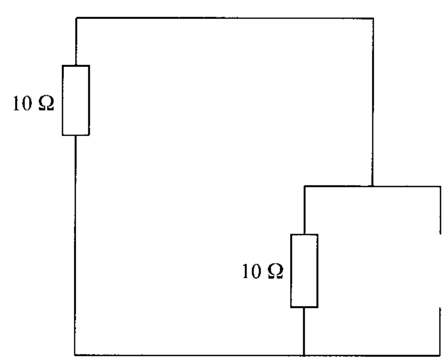
En el circuito siguiente:



La corriente inicial es nula. En cuanto a la constante de tiempo, tomará el valor:

$$\tau_1 = \frac{L}{R_{th}}$$

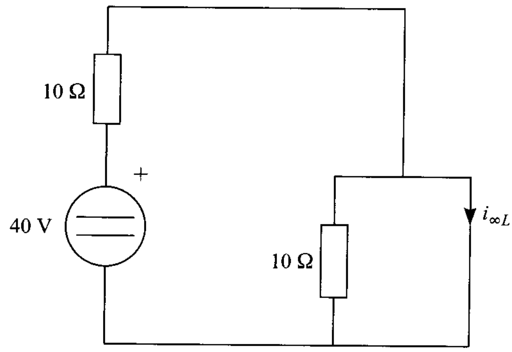
La resistencia Thévenin se obtiene como la resistencia equivalente, vista desde la bobina, del circuito siguiente:



R_{th} tendrá un valor, por tanto, de $R_{th} = 5\ \Omega$, y la constante de tiempo valdrá:

$$\tau_1 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5} = 1 \text{ ms}$$

En cuanto a la corriente en régimen permanente, se obtendrá en el siguiente circuito:



Puesto que por la resistencia de 10 Ω en paralelo con un cortocircuito no circulará ninguna corriente, $i_{\infty L} = 40/10 = 4$ A.

Por tanto, la corriente que circulará por la resistencia en este intervalo temporal será:

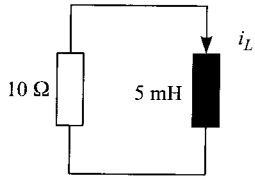
$$i_L(t) = 4 \cdot (1 - e^{-1.000t})$$

Una vez transcurridos los 10 ms en los que los interruptores están en esta posición, se puede considerar que la corriente ha alcanzado su régimen permanente, puesto que han transcurrido 10 constantes de tiempo desde que se produjo el transitorio, y por tanto

$$i_L(t = 10 \text{ ms}) = 4 \text{ A}$$

- Intervalo $0{,}01 \leqslant t$

Se comienza con la bobina. Puesto que el interruptor S_1 está abierto, la bobina se descargará a través de la resistencia en paralelo con ella, en el siguiente circuito:



La expresión de la corriente será:

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) + [i_L(t_o) - i_{L\infty}(t_o)] \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

donde $t_o = 0{,}01$ s.

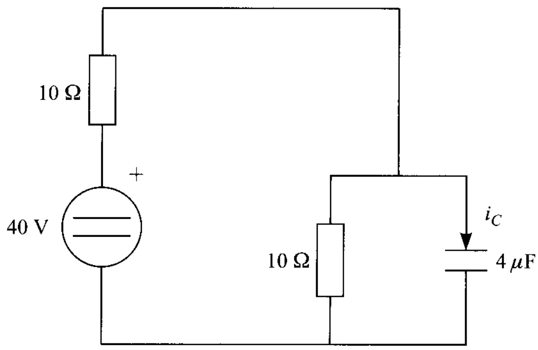
Puesto que no hay fuentes en este circuito, la corriente en régimen permanente será nula, esto es, $i_{L\infty}(t) = i_{L\infty}(t_o) = 0$. La constante de tiempo será:

$$\tau_2 = 5 \cdot 10^{-3}/10 = 0{,}5 \text{ ms}$$

en cuanto a la corriente en $t = t_o$, tal como se ha indicado anteriormente, es la corriente de régimen permanente del circuito de la bobina en su estado anterior, esto es, $i_L(t_o) = 4$ A. Por consiguiente:

$$i_L(t) = 4 \cdot e^{-2.000(t-0{,}01)}$$

En cuanto al condensador, se obtendrá en esta ocasión la corriente directamente. El circuito resultante tras la maniobra será, en lo concerniente al condensador,

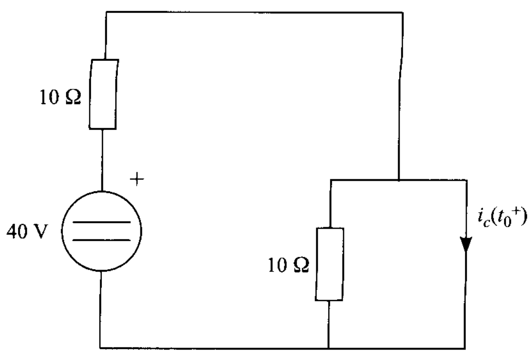


y la corriente en el condensador tomará el valor:

$$i_C(t) = i_{C\infty}(t) + [i_C(t_0^+) - i_{C\infty}(t_o)] \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

Puesto que la corriente en un condensador no es variable de estado, no tiene por qué haber continuidad entre sus valores antes y después de la maniobra, por lo que se deberá hallar el valor de la corriente inmediatamente después de la maniobra.

En este momento, el condensador está descargado, por lo que la tensión entre sus terminales es nula, lo que equivale a un cortocircuito, tal como se muestra en el circuito siguiente:

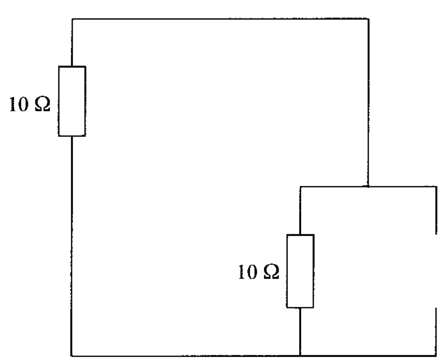


La corriente en este caso será:

$$i(t_o^+) = 40/10 = 4 \text{ A}$$

En cuanto a la corriente en el régimen permanente, tendrá un valor nulo, puesto que un condensador en continua se comporta como un circuito abierto en régimen permanente. Por tanto, $i_{C\infty}(t) = i_{C\infty}(t_o) = 0$.

La constante de tiempo será $\tau = R_{th} \cdot C$. La resistencia Thévenin se obtendrá del siguiente circuito:



y por tanto, tendrá un valor de $R_{th} = 5\ \Omega$. La constante de tiempo valdrá $\tau = 5 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 20\ \mu$s.

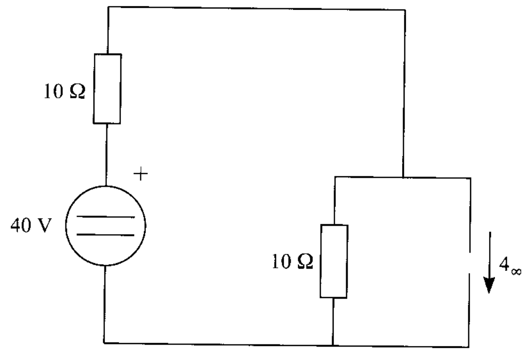
Finalmente, la expresión de la corriente i_C será:

$$i_C(t) = 4 \cdot e^{50.000(t-0,01)}$$

En cuanto a la tensión, tendrá la expresión:

$$u(t) = u_\infty(t_o) + [u(t_o) - u_\infty(t_o)]e^{-(t-t_o)/\tau}$$

La constante de tiempo ya se ha obtenido, y vale $\tau = 20\ \mu s$ y la tensión inicial, en $t = t_o$ será nula. En cuanto a la tensión en régimen permanente, tendrá que obtenerse del siguiente circuito:



Y tomará el valor, aplicando la fórmula del divisor de tensión:

$$u_\infty = 40 \cdot 10/(10 + 10) = 20 \text{ V}$$

Por consiguiente, la tensión en el condensador valdrá:

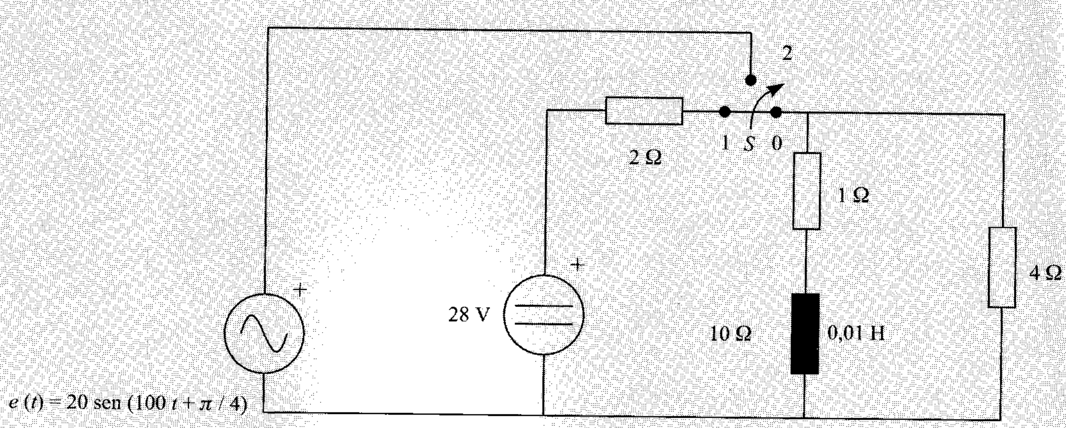
$$u(t) = 20 - 20e^{-50.000(t-0,01)}$$

Si a partir de esta expresión se obtiene la corriente en el condensador aplicando la fórmula que relaciona ambas magnitudes:

$$i_C = C\frac{du}{dt}$$

se obtendrá la misma expresión de la corriente que la que se obtuvo directamente.

4.9. El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ el interruptor S pasa de posición 0-1 a la posición 0-2. Determínese la intensidad y la tensión en la bobina para $t = 0$.

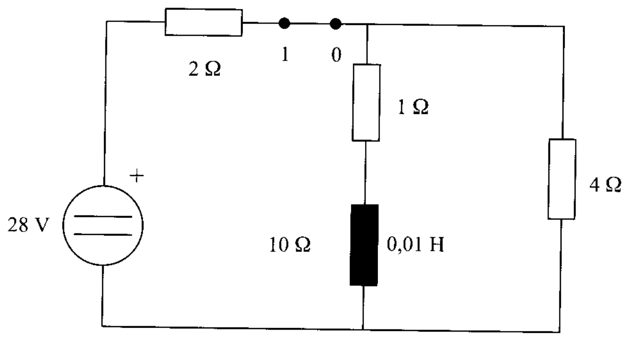


SOLUCIÓN

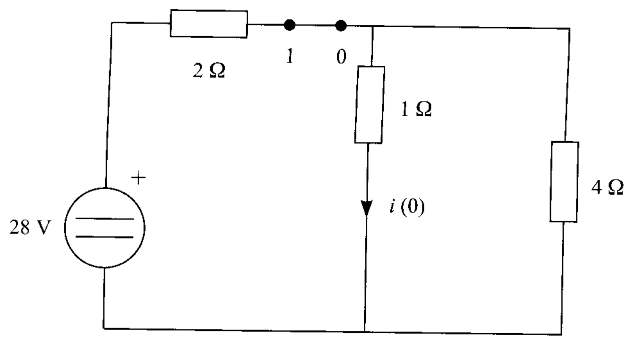
La corriente que circulará por la bobina cuando se produzca la maniobra tendrá la expresión:

$$i(t) = i_{\infty}(t) + [i(0) - i_{\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

La corriente inicial por la bobina vendrá dada por el régimen permanente del circuito en el que ha estado conectada un tiempo infinito antes de la maniobra, que es el que se representa a continuación.



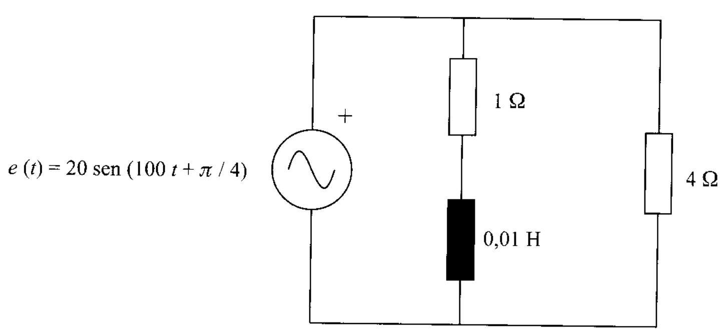
Puesto que en régimen permanente, y en corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito, la corriente que circulará por ella se obtendrá del circuito siguiente:



La corriente $i(0)$ tendrá el valor:

$$i(0) = \frac{4}{4+1} \cdot \frac{28}{2 + \dfrac{1 \cdot 4}{1+4}} = 8 \text{ A}$$

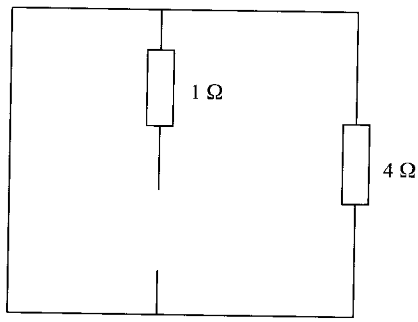
La constante de tiempo se obtendrá en el circuito que queda tras la maniobra, que es el que se representa a continuación:



La constante de tiempo tiene el valor:

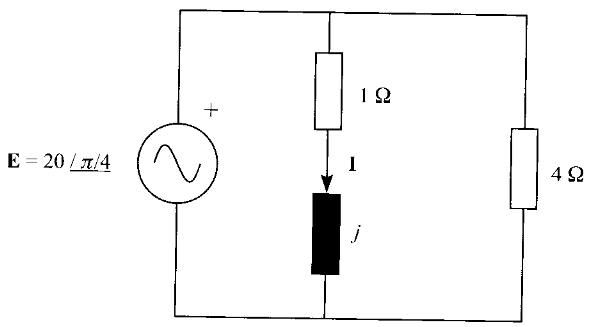
$$\tau = L/R_{th}$$

donde R_{th} es la resistencia del circuito visto desde la bobina, y con las fuentes independientes anuladas, como en el siguiente circuito:



Esta resistencia es $R_{th} = 1\ \Omega$, y por consiguiente, $\tau = 0{,}01/1 = 10$ ms.

El valor de la corriente en régimen permanente tiene que hallarse a partir del circuito de alterna asociado al anterior.



El fasor de corriente en este circuito de alterna tiene el siguiente valor:

$$I = \frac{1}{1+j} \cdot 20\underline{/\pi/4} = 14{,}142\underline{/0}$$

Por lo que la corriente en régimen permanente que circula por la bobina, en el dominio del tiempo, será:

$$i_{\infty}(t) = 14{,}142 \cdot \text{sen}\, 100t$$

Y por tanto,

$$i_{\infty}(0) = 0\ \text{A}$$

Sustituyendo todos estos valores en la expresión de la corriente, ésta queda de la siguiente manera:

$$i(t) = 14{,}142 \cdot \text{sen}\, 100t + 8 \cdot e^{-100t}$$

La tensión se puede obtener a partir de la corriente circulante, como:

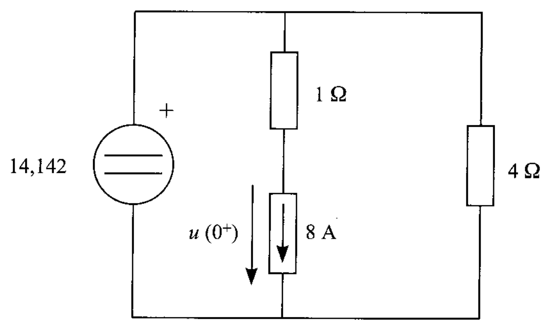
$$u(t) = L\frac{di}{dt} = 14{,}142\cos 100t - 8 \cdot e^{-100t}$$

Además, la tensión se podría haber obtenido directamente, a partir de su expresión:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0^+) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

en la que el valor inicial de la tensión es el que aparece inmediatamente después de haber efectuado la maniobra, ya que al no ser la tensión en la bobina una variable de estado, no tiene por qué tomar el mismo valor antes y después de la misma.

Este valor inicial se obtiene considerando las tensiones en el primer momento, y manteniendo el valor de la corriente circulante por la bobina. Es decir, en el instante $t = 0^+$, el circuito que habría que resolver sería:



En este circuito, la fuente de tensión representa el valor de la fuente de tensión de alterna en $t = 0$, en tanto que la fuente de corriente representa la corriente circulante por la bobina antes de la maniobra, $i(0^-) = i(0^+)$.

El valor de la tensión en la bobina en este instante será, pues,

$$u(0^+) = 14{,}142 - 8 \cdot 1 = 6{,}142 \text{ V}$$

En cuanto a la tensión en régimen permanente será (a partir del circuito de alterna)

$$\mathbf{U} = \frac{j}{1 + j} \cdot 20\underline{/\pi/4} = 14{,}142\underline{/\pi/2}$$

lo que, en el dominio del tiempo, equivale a:

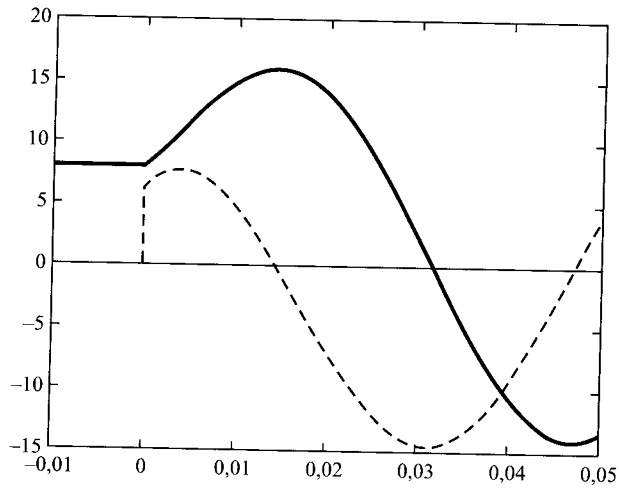
$$u(t) = 14{,}142 \operatorname{sen}(100t + \pi/2) = 14{,}142\cos 100t$$

y, en $t = 0$, $u(t = 0) = 14{,}142$ V. Al sustituir todos estos valores, se obtiene la expresión:

$$u(t) = 14{,}142 \cdot \cos 100t + (6{,}142 - 14{,}142) \cdot e^{-100t}$$

resultado que coincide con el obtenido anteriormente.

En la figura siguiente, se incluye la evolución de la tensión y de la corriente. Se puede observar que la tensión no se mantiene antes y después de la maniobra, que tiene lugar en $t = 0$.

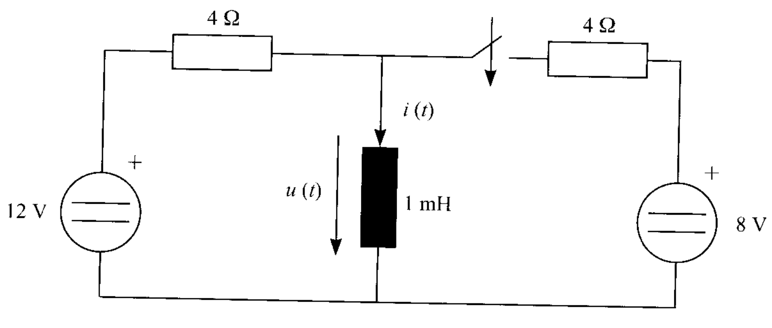


4.10. Una fuente de tensión real de corriente continua y de parámetros $E = 12$ V y $R = 4$ **Ω** tiene dos terminales A y B a los cuales va conectada una bobina de 1 mH, un tiempo **que** puede considerarse infinito. En el instante $t = 0$ se conecta entre dichos terminales **otra** fuente de tensión de parámetros $E = 8$ V y $R = 4$ Ω.

Determínense la corriente $i(t)$ y la tensión $u(t)$ para $t = 0$, considerando las dos **so**luciones posibles según sea la polaridad de la segunda fuente en su conexión con **la** primera.

Solución

Se va a considerar, en primer lugar, la conexión de fuentes siguiente,

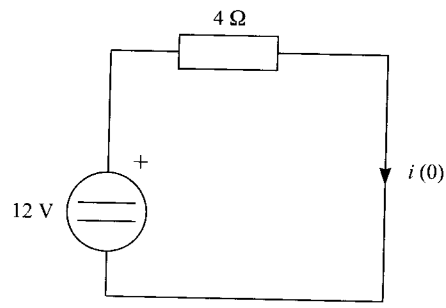


La corriente que circula por la bobina, una vez realizada la maniobra, tendrá la expresión siguiente:

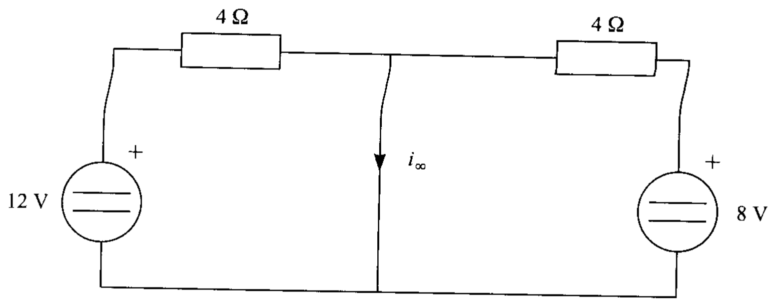
$$i(t) = i_{\infty}(t) + [i(0) - i_{\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

La corriente inicial será la que circulaba por la bobina, antes de la conexión de la fuente de 8 V, tal como se muestra en la figura siguiente, de la que se puede deducir fácilmente que

$$i(0) = 12/4 = 3 \text{ A}$$



En cuanto al valor final de la corriente, se obtendrá del circuito siguiente, en el que la bobina se ha sustituido por un cortocircuito.



Se puede deducir fácilmente que $i_\infty = 12/4 + 8/4 = 5$ A. La constante de tiempo será $\tau = L/R_{th}$, donde R_{th} es el paralelo de las dos resistencias de 4 Ω, por lo que $R_{th} = 2$ Ω, y $\tau = 10^{-3}/2 = 0{,}5$ ms.

Por tanto, la expresión de la corriente será:

$$i(t) = 5 + (3 - 5) \cdot e^{-2.000t}$$

$$i(t) = 5 - 2 \cdot e^{-2.000t}$$

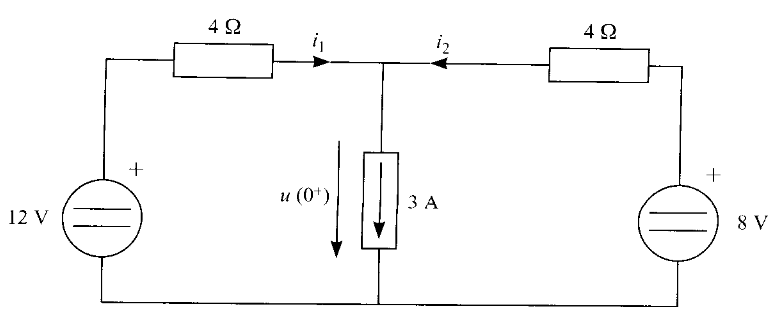
La tensión se puede obtener como:

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = 4 \cdot e^{-2.000t}$$

Para obtenerla directamente, mediante la ecuación

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0^+) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

es necesario obtener la tensión en la bobina en $u(0^+)$, para lo que hay que resolver el siguiente circuito:



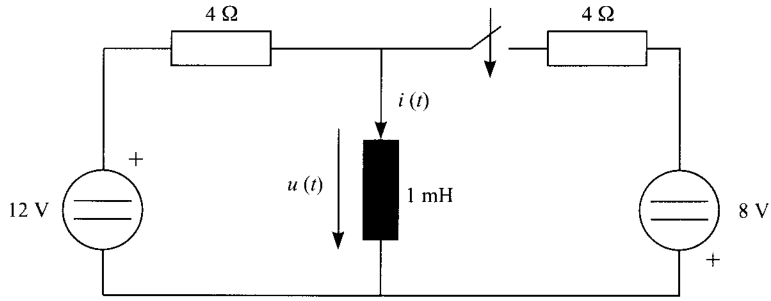
en el que la tensión $u(0^+)$ se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$12 - 4i_1 = u(0^+)$$
$$8 - 4i_2 = u(0^+)$$
$$i_1 + i_2 = 3$$

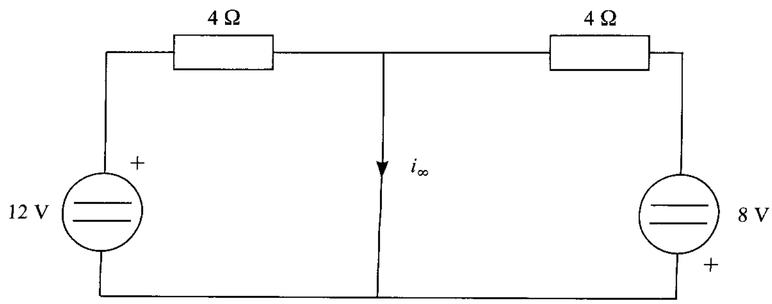
La resolución de este sistema da el valor $u(0^+) = 4$ V.

La tensión final en la bobina será nula, tal como corresponde al régimen permanente en un circuito de continua, y la constante de tiempo será, tal como se ha deducido antes, $\tau = 0{,}5$ ms. Si se sustituyen todos estos valores en la ecuación anterior, se llega al mismo resultado que derivando la expresión de la corriente.

En segundo lugar, se estudiará la conexión siguiente:



En este circuito, la constante de tiempo, y la corriente inicial de la bobina tendrán el mismo valor que en el primer caso. Sólo es necesario hallar, pues, la corriente en régimen permanente, que se obtiene de la resolución del circuito siguiente:



En este circuito, la corriente i_∞ se obtiene como

$$i_\infty = 12/4 - 8/4 = 1 \text{ A}$$

por tanto, la expresión de la corriente por la bobina será:

$$i(t) = 1 + (3 - 1) \cdot e^{-2.000t}$$

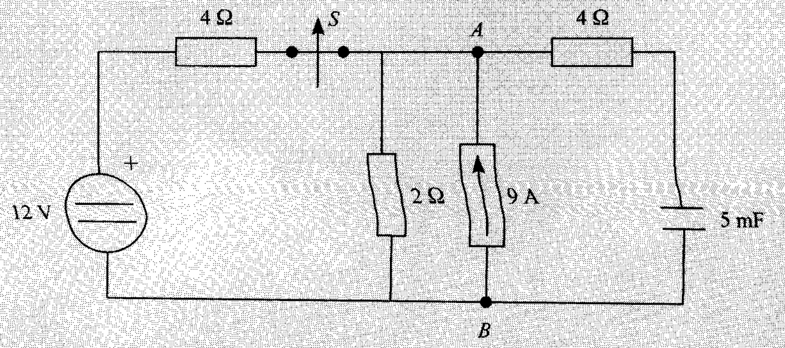
esto es

$$i(t) = 1 + 2 \cdot e^{-2.000t}$$

Y la tensión en la bobina será:

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = -4 \cdot e^{-2.000t}$$

4.11. En el circuito de la figura, el interruptor S lleva cerrado un tiempo infinito. En el instante $t = 0$ s se abre y permanece así definitivamente. Calcúlese para $t = 0$ s la expresión de $u_{AB}(t)$.

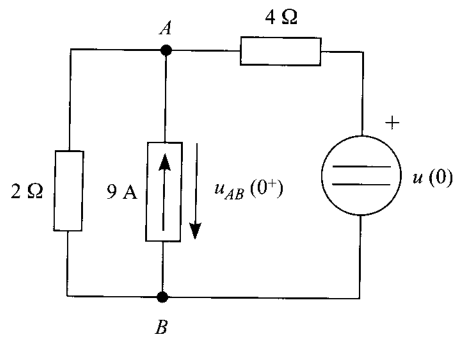


SOLUCIÓN

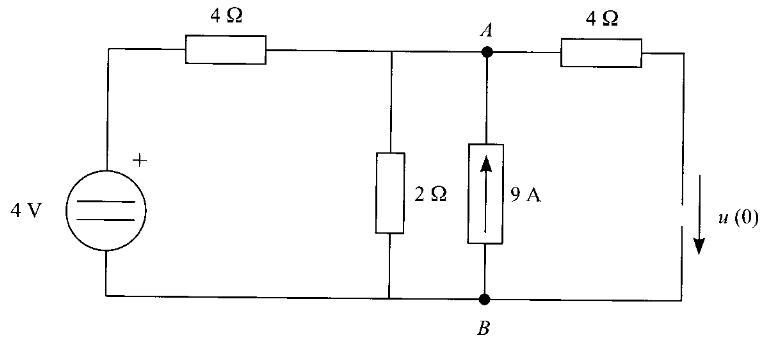
La evolución de la tensión $u_{AB}(t)$ vendrá dada por la expresión:

$$u_{AB}(t) = u_{AB\infty}(t) + [u_{AB}(0^+) - u_{AB\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

en la que la tensión inicial es la que se presenta entre los terminales A y B nada más efectuarse la maniobra de apertura del interruptor S. Esta tensión se tiene que hallar en el circuito siguiente:



La fuente de tensión representa el condensador, cargado a su tensión inicial, que será la tensión que hay en el condensador justo antes de la maniobra de apertura, y que a su vez se obtiene en el siguiente circuito:



Una forma sencilla de obtener esta tensión es utilizando el método de superposición. La tensión $u(0)$ es idéntica a la tensión en la fuente de corriente y la resistencia de 2 Ω. Si sólo actuase la fuente de corriente, la tensión en esta resistencia sería el resultado de multiplicar el valor de la fuente de corriente por el paralelo de la resistencia de 2 Ω con la de 4 Ω, es decir:

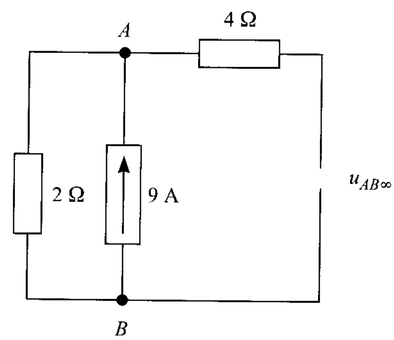
$$u'(0) = 9 \cdot (2 \cdot 4/(2 + 4)) = 12 \text{ V}$$

Cuando sólo actúa la fuente de 4 V, la tensión en la resistencia de 2 Ω será:

$$u''(0) = 4 \cdot 2/(2 + 4) = 1{,}33 \text{ V}$$

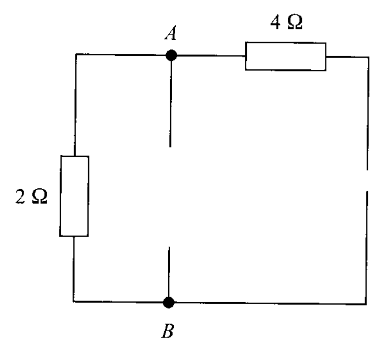
Por tanto, la tensión $u(0) = u'(0) + u''(0) = 13{,}33$ V.

En cuanto a la tensión en régimen permanente, $u_{AB\infty}$, se obtiene en el siguiente circuito:



Y su valor será $u_{AB\infty} = 9 \cdot 2 = 18$ V.

La constante de tiempo se debe obtener como $\tau = R_{th}C$, donde R_{th} es la resistencia vista desde el condensador del circuito siguiente:



En él se puede calcular $R_{th} = 6$ Ω, y por tanto $\tau = 6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 30$ ms.

Sustituyendo todos estos valores se obtiene:

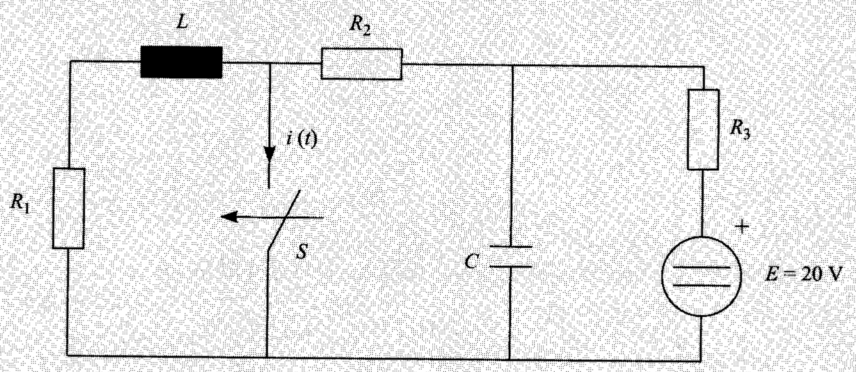
$$u_{AB}(t) = 18 + (13{,}333 - 18)e^{-t/\tau}$$

es decir,

$$u_{AB}(t) = 18 - 4{,}667 \cdot e^{-33{,}33t}$$

4.12. El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor S. Determínese la intensidad $i(t)$ para $t = 0$.

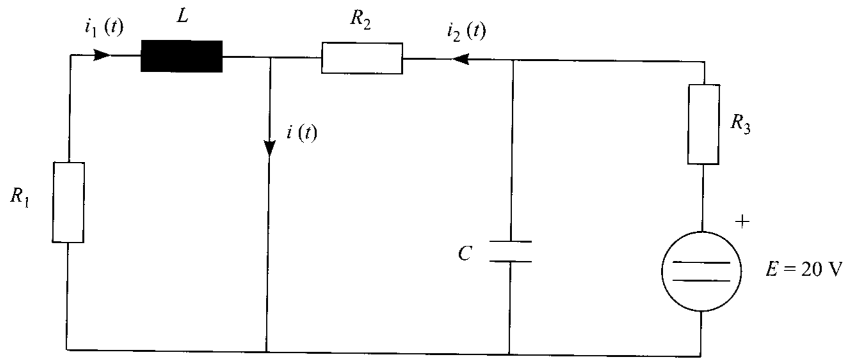
Datos: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 5\ \Omega$; $L = 1$ mH y $C = 4\ \mu$F.



Nota: para el cálculo de $i(t)$ téngase en cuenta que al cerrar el interruptor S los circuitos R_1-L y E-R_2-R_3-C son circuitos de primer orden e independientes.

SOLUCIÓN

La resolución de este circuito, puesto que consta exclusivamente de elementos lineales, se debe efectuar utilizando el principio de superposición. Como indica la nota del enunciado del problema, aun cuando haya dos elementos dinámicos en el circuito, al estar separados por un cortocircuito, las partes de los circuitos que los contienen son de hecho independientes, por lo que se podrán estudiar por separado, una vez que el interruptor S esté cerrado.

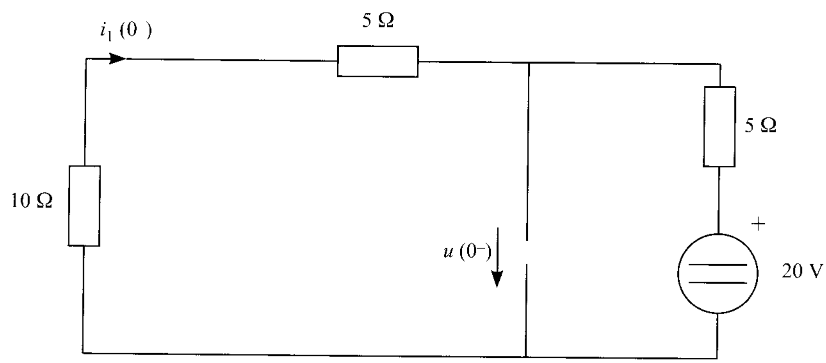


Por tanto, una vez que el interruptor S está cerrado, la corriente en el circuito $i(t)$ se puede obtener como suma de $i_1(t)$ e $i_2(t)$, esto es:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Se tendrán, pues, que obtener los regímenes transitorios de dos circuitos: el que está a la izquierda del interruptor (circuito inductivo) y el que está a la derecha (circuito capacitivo).

Se comenzará obteniendo las condiciones iniciales. Puesto que el interruptor S estaba abierto antes de efectuar la maniobra, los dos circuitos, antes de dicha maniobra, forman uno solo. Éste, sin embargo, sólo hay que analizarlo en régimen permanente, por lo que se deberá sustituir la bobina por un cortocircuito, y el condensador por un circuito abierto.



La corriente inicial que circula por la bobina será:

$$i_1(0^-) = -20/(20) = -1 \text{ A}$$

En tanto que la tensión en el condensador será (aplicando la fórmula del divisor de tensión):

$$u(0^-) = 20 \cdot (15/20) = 15 \text{ V}$$

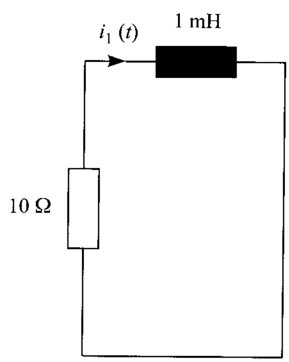
- Circuito de la bobina

La expresión de la corriente en el circuito de la bobina, una vez que el interruptor S ya está cerrado será:

$$i_1(t) = i_{1\infty}(t) + [i_1(0) - i_{1\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau 1}$$

La constante de tiempo del circuito inductivo será:

$$\tau_1 = L/R_{th} = 10^{-3}/10 = 0{,}1 \text{ ms}$$

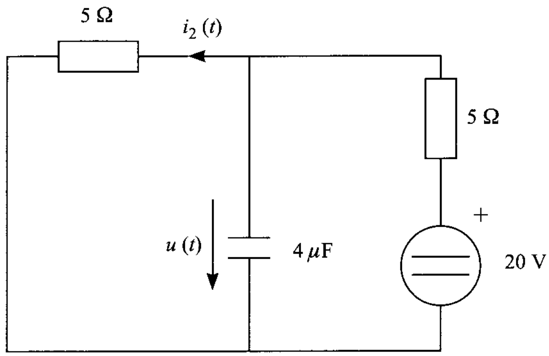


La corriente inicial es de $i_1(0) = -1$ A, como se ha indicado antes, y la corriente en régimen permanente será nula, ya que no hay ninguna fuente independiente. La expresión de la corriente i_1 será, por tanto,

$$i_1(t) = -1 \cdot e^{-t/0{,}0001}$$

- Circuito del condensador

El circuito a la derecha del interruptor, que es donde se encuentra el condensador, será el siguiente:



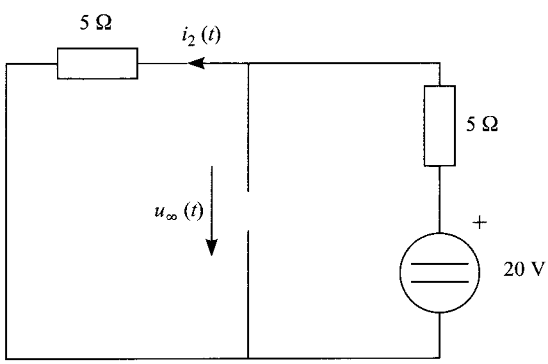
Puesto que en este circuito el condensador y la resistencia de 5 Ω están en paralelo, la corriente i_2 será igual a:

$$i_2(t) = u(t)/5$$

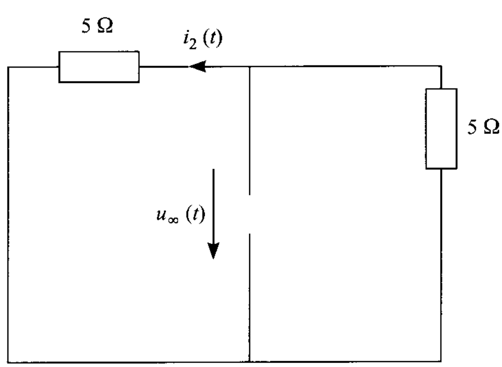
Por tanto, se obtendrá la corriente a partir de la tensión del condensador, que como es sabido, tendrá la expresión:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

El circuito en régimen permanente, en el que el condensador se comporta como un circuito abierto, al ser la fuente de corriente continua, es el siguiente:



La constante de tiempo será $\tau_2 = R_{th} \cdot C$. Para hallarla es necesario obtener la resistencia Thévenin a partir del circuito en el que se han anulado las fuentes:



La resistencia Thévenin es, por tanto,

$$R_{th} = 5/2\ \Omega$$

por consiguiente, la constante de tiempo será:

$$\tau = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 5/2 = 10\ \mu s$$

Y la tensión en régimen permanente se obtiene del circuito en régimen permanente, mediante la fórmula del divisor de tensión, resultando:

$$u_{\infty} = 20 \cdot (5/10) = 10\ V$$

El valor de la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 10 + (15 - 10) \cdot e^{-10.000t} = 10 + 5 \cdot e^{-100.000t}$$

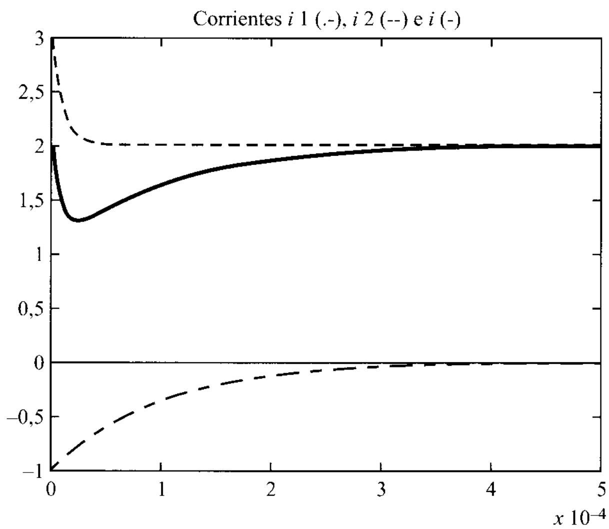
La corriente que circula por la resistencia de 5 Ω será:

$$i_2(t) = u_2/5 = 2 + e^{-100.000t}$$

siendo, por tanto, la corriente $i(t)$

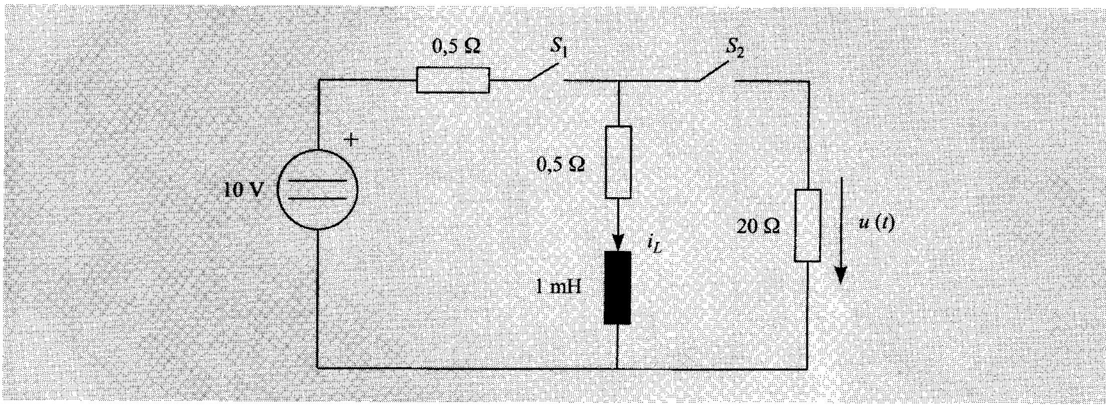
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 2 + e^{-100.000t} - e^{-10.000t}$$

La evolución en el tiempo de $i_1(t)$, $i_2(t)$, e $i(t)$ se muestra en la figura siguiente:



4.13. En el circuito de la figura, S_1 se cierra para $t = 0$. Al cabo 5 ms S_1 se abre y S_2 se cierra. Al cabo de otros 5 ms S_1 se cierra y S_2 se abre y así sucesivamente.

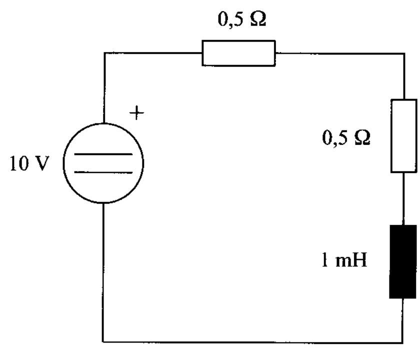
Obténganse $i_L(t)$ y $u(t)$ para $0 < t < 10$ ms y represéntense gráficamente sus formas de onda. Considérese que al cabo de un tiempo igual a 5τ, se ha alcanzado el régimen permanente.



SOLUCIÓN

Hay que estudiar dos transitorios. En primer lugar, durante los primeros 5 ms, la corriente en la bobina adquiere un valor, que luego se reduce cuando se abre S_1 y se cierra S_2.

Se resuelve, en primer lugar, el primer transitorio, entre $0 \leqslant t < 5$ ms. El circuito en el que tiene lugar este transitorio es el que se muestra a continuación:



La expresión general de la corriente en la bobina será:

$$i(t) = i_\infty(t) + [i(0) - i_\infty(0)]e^{-t/\tau 1}$$

La constante de tiempo de este transitorio, τ_1, será:

$$\tau_1 = \frac{L}{R_{th}} = 10^{-3} = 1 \; ms$$

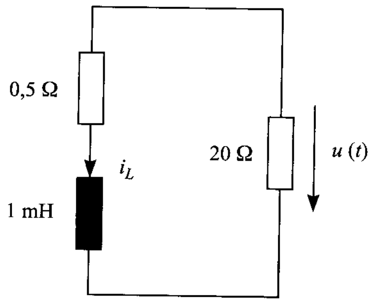
La corriente inicial por la bobina es nula, puesto que antes de la maniobra estaba a circuito abierto $i(0) = 0$.

En régimen permanente, y en continua, la bobina se comporta como un cortocircuito, por lo que la corriente que circularía por ella si los interruptores permaneciesen en esta posición un tiempo infinito, sería $i_\infty = 10$ A. Estos tres valores nos dan la expresión de la corriente en la bobina durante este período:

$$i(t) = 10(1 - e^{-t/\tau 1})$$

Durante todo este tiempo, la tensión en la resistencia vale $u(t) = 0$.

Segundo transitorio (S_1 abierto, S_2 cerrado), para 5ms $\leqslant t < 10$ ms. El circuito que queda tras la maniobra conectado a la bobina, se representa a continuación:



Expresión de la corriente:

$$i(t) = i_\infty(t) + [i(t_o) - i_\infty(t_o)]e^{-(t-t_o)/\tau 2}$$

La constante de tiempo:

$$\tau_2 = \frac{L}{R_{th}} = \frac{10^{-3}}{20{,}5} = 48{,}78\ \mu\text{s}$$

Cinco constantes de tiempo en este circuito equivalen a 243,9 μs, que es un tiempo muy inferior a 5 ms, por lo que se considerará que al cabo de 5 ms se está en régimen permanente.

La corriente inicial por la bobina en el segundo transitorio es la que había al final del primero:

$$i(0) = 10\ \text{A}$$

Y la corriente al final de este segundo transitorio será $i_\infty = 0$ A, puesto que no hay fuentes que mantengan una circulación permanente de corriente.

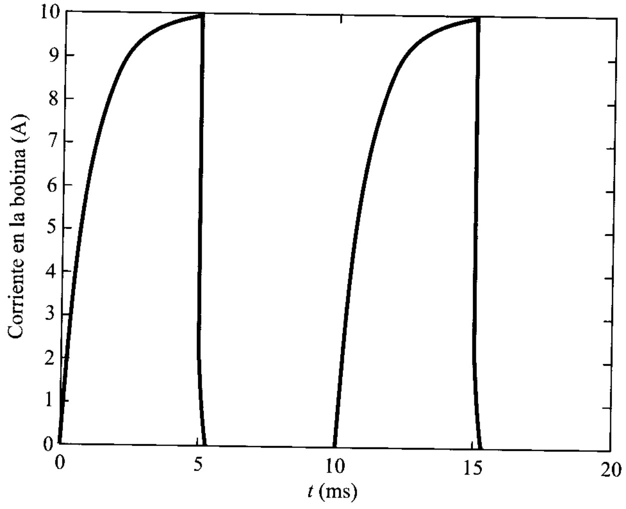
Sustituyendo todos estos valores en la expresión general de la corriente, se obtiene la expresión de ésta:

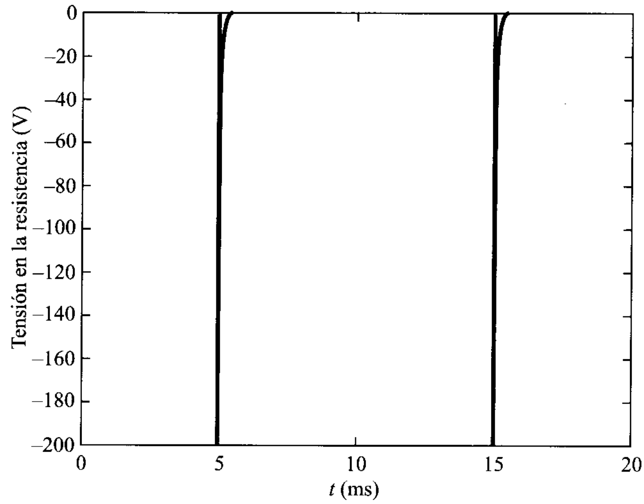
$$i(t) = 10e^{-(t-0{,}005)/\tau 2}$$

Y la tensión en la resistencia será el producto de esta corriente por el valor de la resistencia:

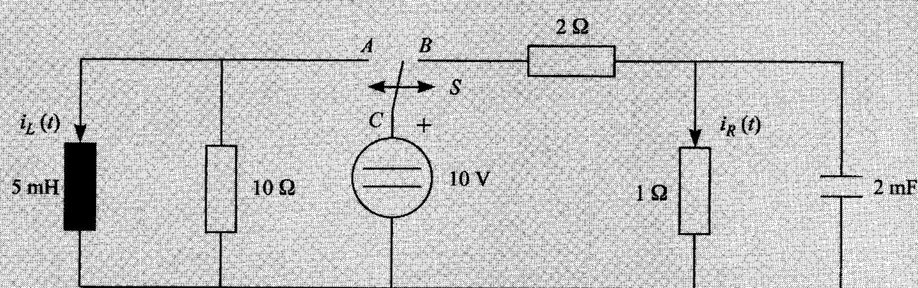
$$u(t) = -10 \cdot 20e^{-(t-0{,}005)/\tau 2} = -200e^{-(t-0{,}005)/\tau 2}$$

A continuación se muestran las evoluciones de corriente y tensión durante dos períodos como los estudiados.





4.14. En el circuito de la figura el interruptor S conecta los puntos A y C en el instante $t = 0$. Al cabo de 10 ms, el interruptor pasa a conectar los puntos B y C; 10 ms más tarde, vuelve a conectar A y C, y así sucesivamente.



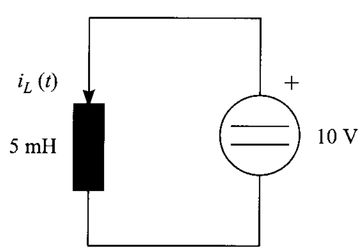
Determínense las expresiones que dan al valor de las corrientes $i_L(t)$ e $i_R(t)$ en función del tiempo, y dibújense de forma aproximada las evoluciones de dichas corrientes durante los 40 ms iniciales.

Notas:

1. Se considera que un circuito ha alcanzado el régimen permanente después de un tiempo superior a 5 constantes de tiempo.
2. La bobina y el condensador están inicialmente descargados.

SOLUCIÓN

Primer período: $0 \leqslant t < 10$ ms

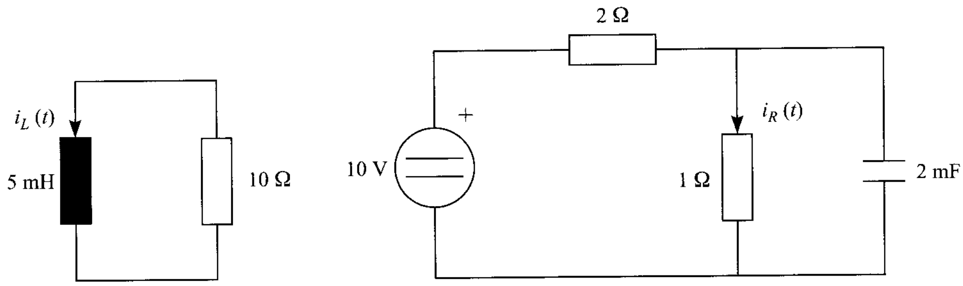


En este circuito (en el que se ha eliminado la resistencia en paralelo con la fuente de tensión que no produce ningún efecto en el circuito), la aplicación de una tensión constante a una bobina ideal hace que la corriente en ésta suba con una pendiente constante, a partir de un valor cero, puesto que está inicialmente descargada:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt = \frac{1}{5\cdot 10^{-3}}\cdot 10t = 2.000t$$

Durante este período de tiempo, $i_R(t) = 0$, y para $t = 10$ ms, $i_L = 20$ A.

Segundo período: $10 \text{ ms} \leqslant t < 20 \text{ ms}$ $t_o = 10$ ms; hay dos circuitos con transitorios independientes:



En el circuito *R-L* la evolución de la corriente tiene la expresión:

$$i_L(t) = i_{L\infty} + [i_L(t_o) - i_\infty]e^{-(t-t_o)/\tau}$$

Constante de tiempo: $\tau_L = \dfrac{L}{R_{th}} = \dfrac{5\cdot 10^{-3}}{10} = 0{,}5$ ms

$$i_L(t) = 20\cdot e^{-(t-0{,}01)\cdot 2000}$$

En el circuito del condensador, la tensión en éste será:

$$u_c(t) = u_\infty + [u(t_o) - u_\infty]e^{-(t-t_o)/\tau}$$

$$\tau_c = R_{th}\cdot C = \frac{2}{3}\,2\cdot 10^{-3} = 43 \text{ ms}$$

$$u(t_o) = 0 \qquad u_\infty = \frac{10}{3} \qquad u_c(t) = \frac{10}{3}\,[1 - e^{-750(t-0{,}01)}]$$

Y por tanto, la corriente por la resistencia de 1 Ω será:

$$i_R(t) = \frac{u_c(t)}{1} = \frac{10}{3}\,[1 - e^{-750(t-0{,}01)}]$$

Una vez transcurridos 10 ms más, se produce otro transitorio:

Tercer período: $20 \text{ ms} \leqslant t < 30 \text{ ms}$ $\qquad t_o = 20$ ms

Corriente en la bobina, que también será una rampa:

$$i_L = i_L(t_o) = \frac{1}{L}\int_{t_o}^t u\,d\tau = \frac{10}{5\cdot 10^3}\,(t - 0{,}02) = 2.000\cdot(t - 0{,}02)$$

$i_L(t_o)=0$ puesto que han transcurrido más de 5 constantes de tiempo. Para $t=30$ ms, $i_1=20$ A.

En el circuito del condensador no hay ninguna fuente conectada en esta ocasión, por lo que el condensador se descarga a través de la resistencia de 1 Ω. La expresión de la tensión en el condensador será:

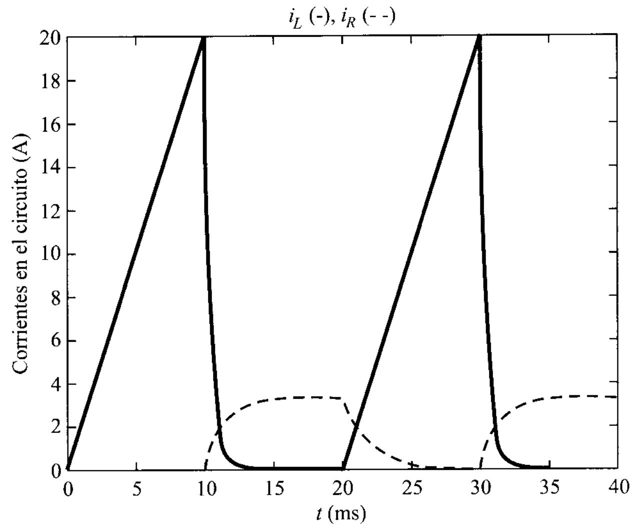
$$u_c(t) = u_\infty + [u(t_o) - u_\infty]e^{-(t-t_o)/\tau} \qquad \tau = 2 \text{ ms}$$

$$u_c(t) = \frac{10}{3}[1 - e^{-(t-0{,}02)500}]$$

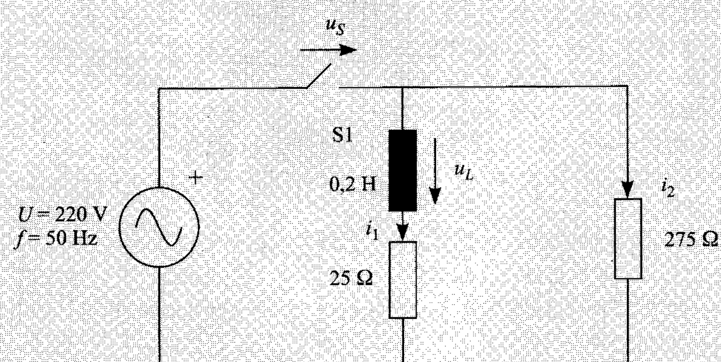
Y por tanto, la corriente por la resistencia tomará el valor:

$$i_R(t) = \frac{u_c}{1} = \frac{10}{3}[e^{-(t-0{,}02)500}]$$

En la figura siguiente se representa la evolución de las corrientes por la resistencia, y por la bobina, en este circuito.



4.15. En el circuito de la figura, se abre el interruptor S_1 después de un tiempo suficientemente grande para considerar que el circuito funcionaba en régimen permanente.



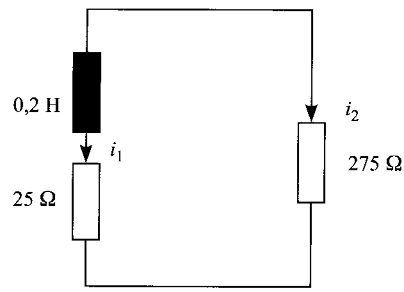
Expresar y dibujar las formas de onda de i_1, i_2 y u_L desde 20 ms antes de la apertura del interruptor hasta 5 ms después de dicha apertura, suponiendo que la fuente es sinusoidal de valor eficaz 220 V, y que en el instante de abrirse el interruptor la tensión de la fuente pasaba por un máximo. Obténgase también la tensión en el interruptor, u_s.

Solución

Expresión general de la corriente:

$$i(t) = i_\infty + [i(0) - i_\infty]e^{-t/\tau}$$

El circuito en el que se produce el transitorio es el siguiente:



La constante de tiempo en este intervalo, τ_1, toma el valor:

$$\tau_1 = \frac{L}{R_{th}} = \frac{0{,}2}{300} = \frac{2}{3}\text{ ms}$$

La resistencia Thévenin es la asociación en serie de las dos resistencias presentes en el circuito.

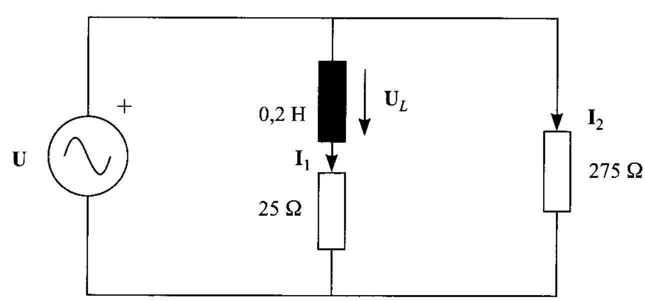
En cuanto a la corriente que circula por la bobina en régimen permanente: $i_\infty = 0$ A, pues no hay fuentes que puedan mantener la corriente.

Para hallar el valor inicial de la corriente es necesario obtener el régimen permanente del sistema anterior, puesto que el interruptor llevaba un tiempo suficientemente grande cerrado como para que se pudiera considerar un régimen permanente. Sea el valor de la fuente de tensión, en el dominio del tiempo:

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cos(\omega t + \varphi)$$

donde φ tendrá que ser deducido. Esta tensión da lugar a la siguiente corriente por la resistencia:

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}8 \cos(\omega t + \varphi)$$



Se indica en el enunciado que la tensión pasa por un máximo cuando se produce la maniobra. Si se toma este instante como origen de tiempos, queda determinado el valor de φ, que tendrá el valor nulo para que se cumpla esta condición. Por consiguiente, el fasor asociado a esta tensión será:

$$\mathbf{U} = 220\angle 0^\circ$$

Y la corriente que circula por la rama R-L será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}}{25 + j20\pi} = \frac{220}{25 + j20\pi} = 3{,}25\underline{/-68{,}3^\circ}$$

Que corresponde a una corriente cuya expresión temporal es:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 3{,}25 \cos(\omega t - 68{,}3\pi/180)$$

Y en el instante $t = 0$ (cuando se produce el transitorio):

$$i_1(0) = \sqrt{2} \cdot 3{,}25 \cos(68{,}3\pi/180) = 1{,}7 \text{ A}$$

A partir de aquí se obtiene la tensión en la bobina:

$$\mathbf{U}_L = j20\pi \cdot 3{,}25\underline{/-68{,}3^\circ} = 204{,}2\underline{/21{,}7^\circ}$$

$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot 204{,}2 \cos(\omega t - 21{,}7\pi/180)$$

La expresión de la corriente por la bobina tras el transitorio sería:

$$i_1(t) = 1{,}7e^{-1.500t}$$

Y la tensión en la propia bobina sería, tras aplicar la ecuación de definición de la bobina:

$$u(t) = -510e^{-1.500t}$$

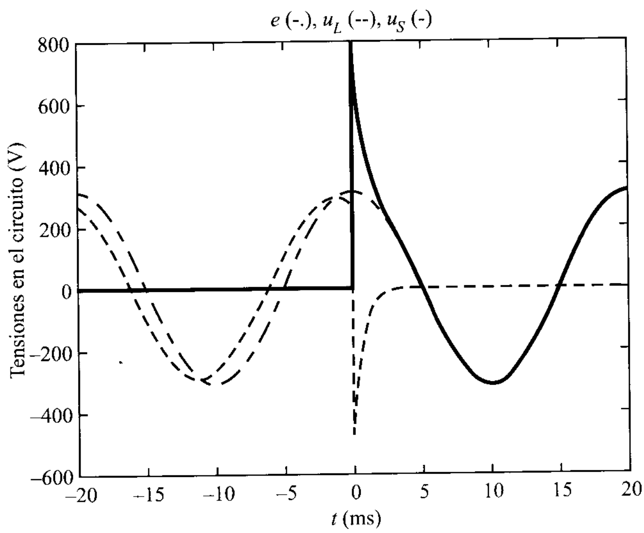
La corriente por la resistencia R_2 sería:

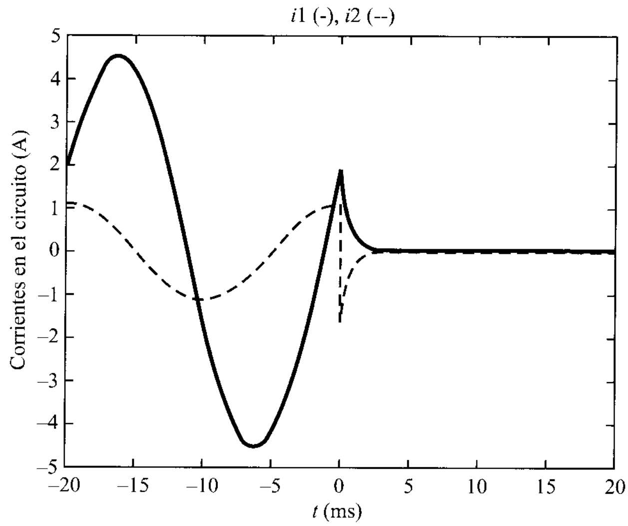
$$i_2(t) = -1{,}7e^{-t/\tau}$$

Y, finalmente, la tensión entre los dos polos del interruptor será:

$$u_s(t) = e(t) - R \cdot i_2 = \sqrt{2} \cdot 220 \cos \omega t - 275 \cdot (-1{,}7)e^{-t/\tau}$$

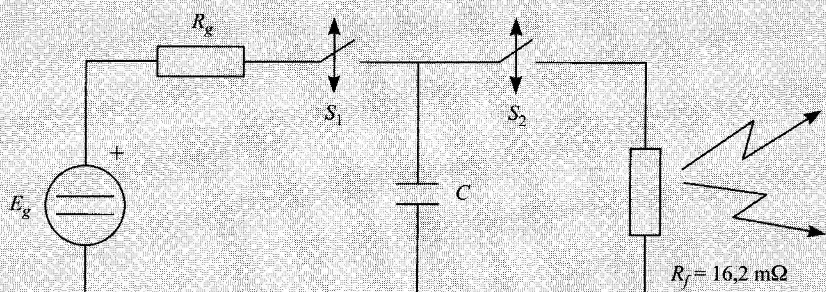
$$u_s(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cos \omega t + 467{,}5e^{-t/\tau}$$





4.16. El circuito de la figura representa el funcionamiento de un «flash». E_g y R_g son los parámetros de las baterías que se emplean para cargar el condensador *c*, con el interruptor S_1 cerrado. La lámpara del «flash» viene representada por la resistencia $R_f = 16{,}2\ \text{m}\Omega$, y se ilumina cuando se cierra el interruptor S_2, con lo que la energía almacenada en *C* se disipa en R_f. Para que el «flash» luzca con la intensidad deseada es necesario que se disipe en R_f una energía $w_f = 2$ J en un tiempo $t_f = 1/250$ s. Además, se desea que este «flash» pueda actuar al menos 2 veces por segundo. Calcúlese:

1. Los valores mínimos del condensador *C* y de la fuente E_g y máximo de R_g para que se cumplan estas especificaciones.
2. Dibújense las formas de onda de la corriente y la tensión en el condensador durante 1 s suponiendo que el «flash» ha actuado 2 veces en este período de tiempo. Indíquense también las expresiones temporales de ambas magnitudes.

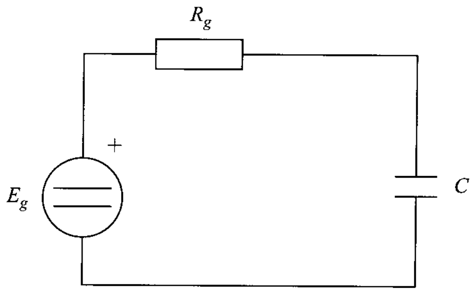


Notas:

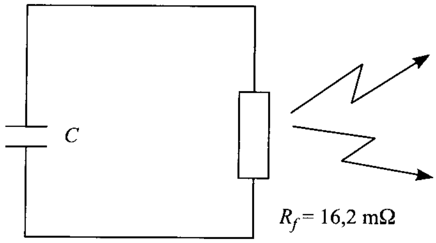
1. Se considera que el régimen permanente se alcanza después de 5 constantes de tiempo.
2. Un mecanismo impide que los interruptores S_1 y S_2 estén abiertos o cerrados simultáneamente.

SOLUCIÓN

El transitorio constará de dos etapas. Por un lado, el condensador se carga en el circuito siguiente:



Una vez cargado, se produce la descarga de este condensador a través de la resistencia del «flash»:



1. Para que el valor de C sea el mínimo posible, en la carga y en la descarga se debe alcanzar el régimen permanente. Un condensador mayor también almacenaría la energía necesaria en este tiempo, sin necesidad de que se alcanzase el régimen permanente.

- Tiempo en el que se tiene que descargar el condensador:

$$t_f = 1/250 = 5\tau_1 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{1}{5 \cdot 250} = 0{,}8 \text{ ms}$$

$$\tau_1 = R_f \cdot C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{16{,}2 \cdot 10^{-3}} = 49{,}38 \text{ mF}$$

- Energía que se ha disipado:

$$w_f = \frac{1}{2} Cu^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2w_f}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{49{,}38 \cdot 10^{-3}}} = 9 \text{ V}$$

$$E_g = 9 \text{ V (valor de la fuente)}$$

- Tiempo que tarda en cargarse:

$2 \cdot$(tiempo de carga + tiempo de descarga) = 1

$$2 \cdot (5\tau_1 + 5\tau_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - 5 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}\right) = 0{,}0992 \text{ s}$$

$$\tau_2 = R_g \cdot C \quad \Rightarrow \quad R_g = \frac{0{,}0992}{49{,}38 \cdot 10^{-3}} = 2\ \Omega$$

2. Expresiones temporales.

$$u(t) = u_\infty + [u(t_o) - u_\infty]e^{-(t - t_o)/\tau} \qquad i(t) = C\frac{du}{dt}$$

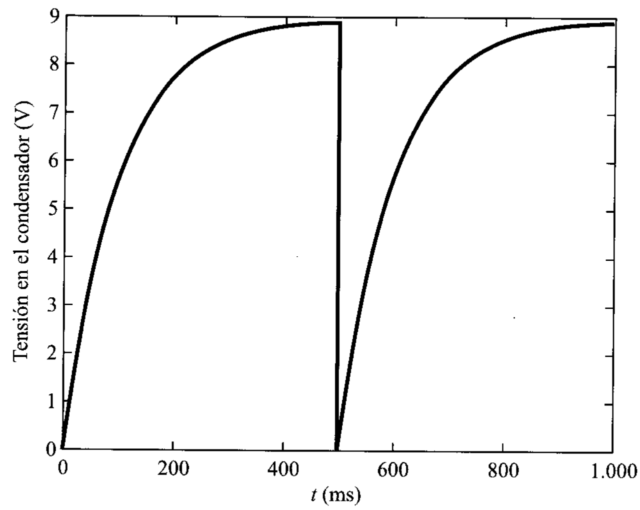
- Carga:

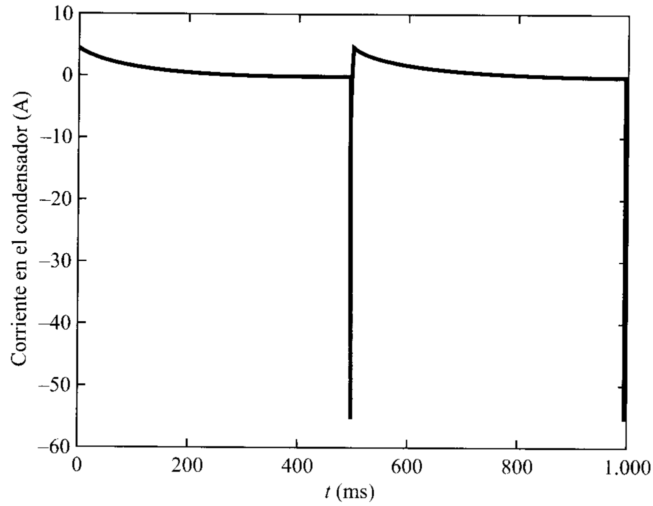
$$u_\infty = 9 \text{ V} \qquad u(t) = 9(1 - e^{-(t-t_o)/\tau})$$
$$\tau = \tau_2 = 0{,}0992 \text{ ms} \qquad i(t) = 4{,}48e^{-(t-t_o)/\tau}$$
$$u(t_o) = 0 \text{ V}$$

- Descarga:

$$u_\infty = 0 \text{ V} \qquad u(t) = 9e^{-(t-t_o)/\tau}$$
$$\tau = \tau_1 = 0{,}8 \text{ ms} \qquad i(t) = -555{,}52e^{-(t-t_o)/\tau}$$
$$u(t_o) = 9 \text{ V}$$

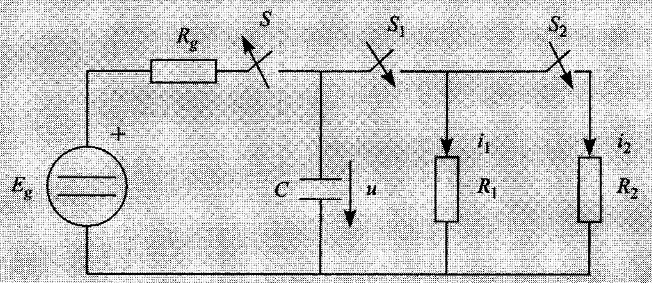
Carga 1	$t_o = 0$	$0 < t < 5\tau_2$
Descarga 1	$t_o = 5\tau_2$	$5\tau_2 < t < 5\tau_2 + 5\tau_1 = 0{,}5$
Carga 2	$t_o = 0{,}5$	$0{,}5 < t < 0{,}5 + 5\tau_2$
Descarga 2	$t_o = 0{,}5 + 5\tau_2$	$0{,}5 + 5\tau_2 < t < 1$





Nota: la corriente en la descarga está dividida por 10

4.17. En el circuito de la figura, el interruptor S lleva cerrado un tiempo que puede considerarse infinito, en tanto que S_1 y S_2 estaban abiertos. En $t = 0$, S se abre y simultáneamente se cierra S_1. En el instante $t_o = 0{,}5$ s, se cierra el interruptor S_2 permaneciendo S_1 cerrado y S abierto.

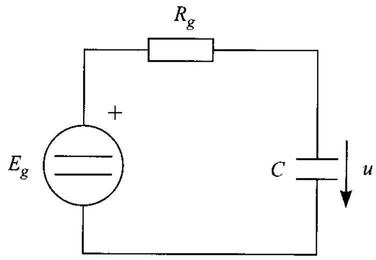


1. Calcúlese la expresión de la tensión u y de las corrientes i_1 e i_2 entre $t = 0$ y $t = 6$ s.
2. Dibújese la evolución de dichas tensión y corrientes con el tiempo.
3. Indíquese durante cuánto tiempo la corriente i_2 es mayor que 30 mA.

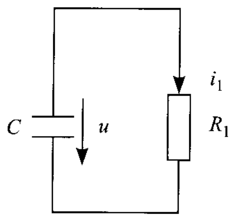
Datos: $E_g = 20$ V; $R_g = 2\ \Omega$; $C = 5$ mF; $R_1 = 500\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$.

SOLUCIÓN

Cuando el interruptor S está cerrado y S_1 y S_2 abiertos, el circuito resultante es el que se muestra en la figura:



En esta situación, el condensador tiene una tensión igual a la de la fuente, $u = 20$ V. Cuando se abre S y se cierra S_1, el circuito resultante es el siguiente:



Y la evolución de la tensión u viene dada por:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

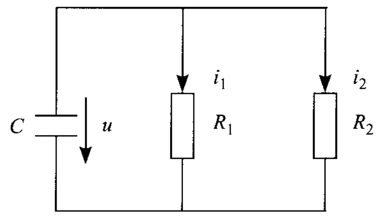
donde u_∞ es cero, ya que no hay fuentes en este circuito. La tensión inicial es la que tenía el condensador antes de la maniobra, $u(0) = 20$ V, y la constante de tiempo, $\tau = R_1 \cdot C = 500 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 2{,}5$ s. Por consiguiente, la tensión en el condensador es:

$$u(t) = 20 \cdot e^{-0{,}4t}$$

La corriente, con el criterio mostrado en la figura, será:

$$i = -C\frac{du}{dt} = 0{,}04 \cdot e^{-0{,}4t}$$

Cuando se produce la segunda maniobra, el circuito resultante será:



De nuevo, la evolución de la tensión vendrá dada por:

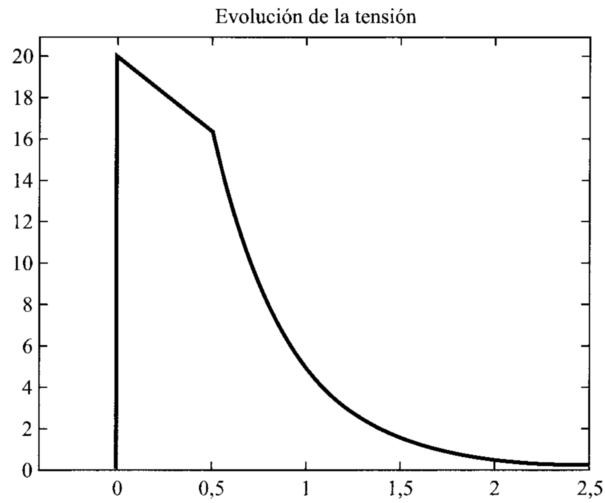
$$u(t) = u_\infty(t) + [u(t_o) - u_\infty(t_o)]e^{-(t-t_o)/\tau 2}$$

La tensión en régimen permanente será nula. La constante de tiempo vendrá dada por $\tau = R_{th}C$. donde R_{th} es el paralelo de R_1 y R_2, que vale $R_{th} = 83{,}33\ \Omega$. La nueva constante de tiempo será, por tanto, $\tau = 83{,}33 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0{,}4167$ s. En cuanto al valor inicial de la tensión, será el que aparezca en el condensador como consecuencia del primer transitorio.

$$u(t_o = 0{,}5\ \text{s}) = 20 \cdot e^{-0{,}4 \cdot 0{,}5} = 16{,}37\ \text{V}$$

Por consiguiente, la tensión en el condensador, en esta nueva etapa, tiene la siguiente expresión, cuya evolución se muestra en la figura siguiente:

$$u(t) = 16{,}37 \cdot e^{-2{,}4(t-0{,}5)}$$



Las corrientes en las resistencias se pueden hallar utilizando la ley de Ohm:

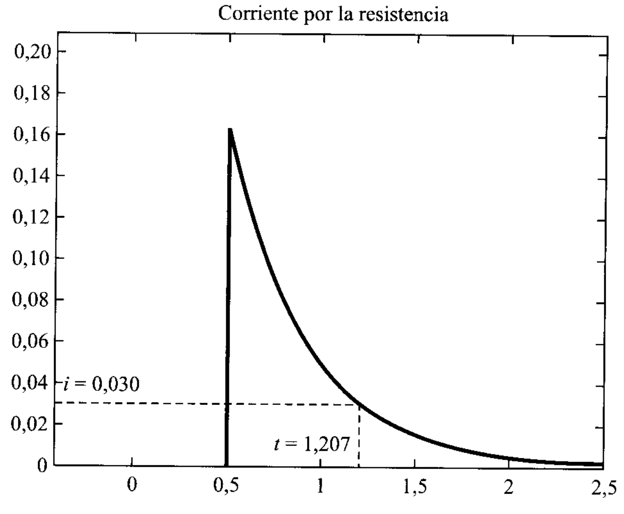
$$i_1(t) = u/R_1 = 0{,}03274 \cdot e^{-2{,}4(t-0{,}5)}$$

$$i_2(t) = u/R_2 = 0{,}1637 \cdot e^{-2{,}4(t-0{,}5)}$$

Para determinar el tiempo que i_2 es superior a 30 mA, se debe resolver la siguiente ecuación:

$$0{,}03 = 0{,}1637 \cdot e^{-2{,}4(t-0{,}5)}$$

Despejando t, se obtiene un valor $t = 1{,}207$ s.

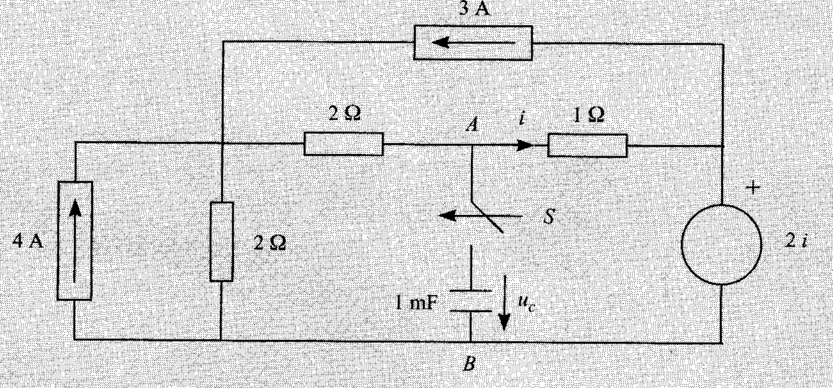


En la figura anterior se muestra la evolución de la corriente, y cuándo ésta iguala a 30 mA.

4.18. En el circuito de la figura el interruptor S se cierra para $t = 0$. Determínese:

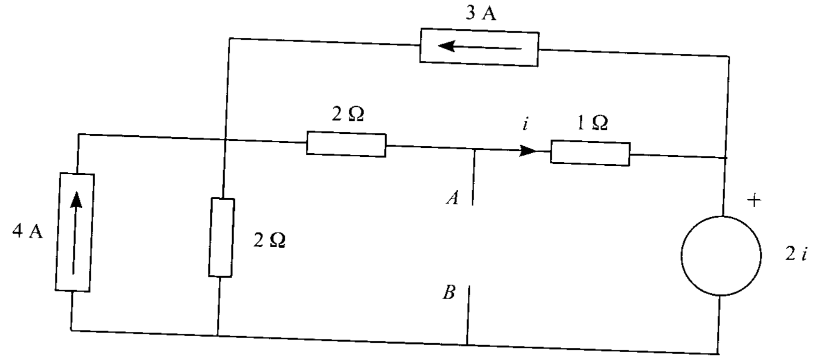
a) Equivalente Thévenin visto desde los terminales A y B.

b) Expresión de la tensión en el condensador $u_c(t)$ para $t \geqslant 0$ si inicialmente estaba cargado a una tensión $u_c(0) = 4$ V.

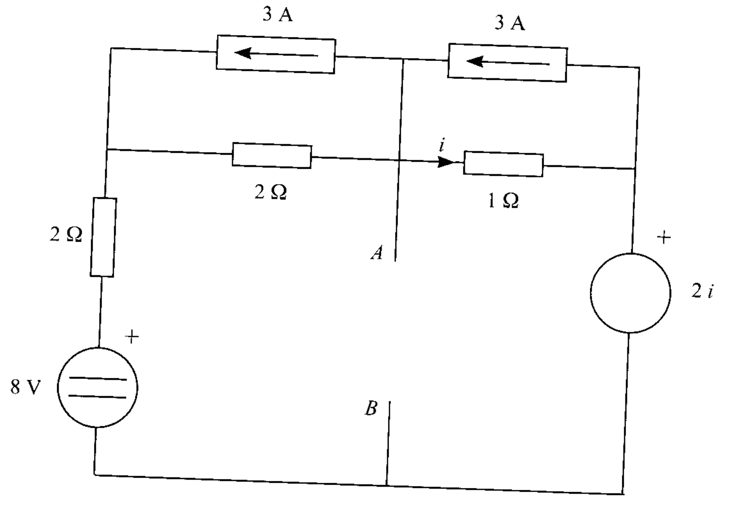


SOLUCIÓN

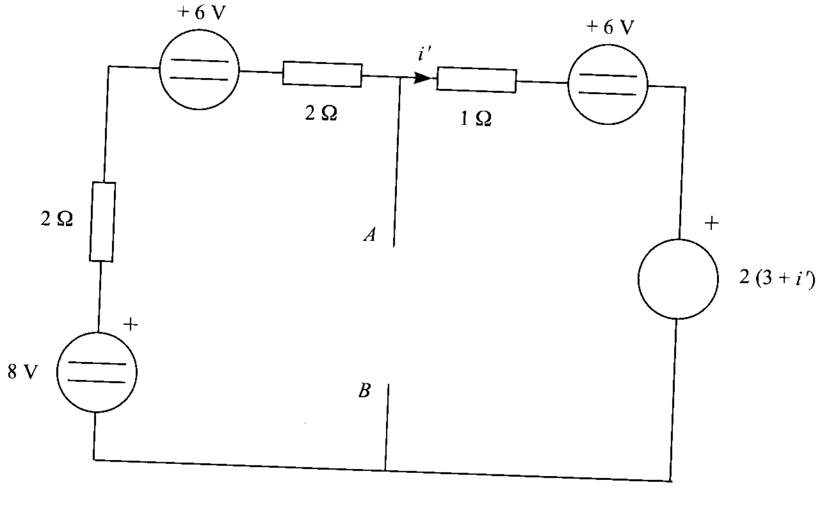
En primer lugar, hay que obtener el equivalente Thévenin del circuito con el interruptor S abierto, que es el que se muestra en la figura siguiente:



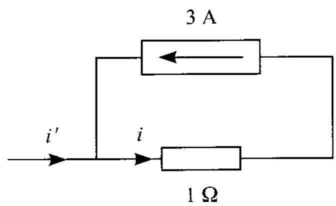
En este circuito se procederá a hallar los valores de la fuente y de la resistencia. La tensión en vacío, entre los terminales A y B se puede obtener, bien aplicando el método de mallas o nudos, bien modificando el circuito para simplificarlo. Si se escoge este último, es necesario transformar las fuentes de la forma siguiente:



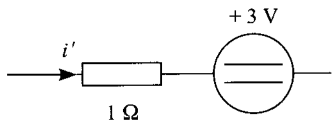
Un paso más será la conversión de las fuentes de corriente de 3 A en fuentes de tensión, quedando el circuito resultante como:



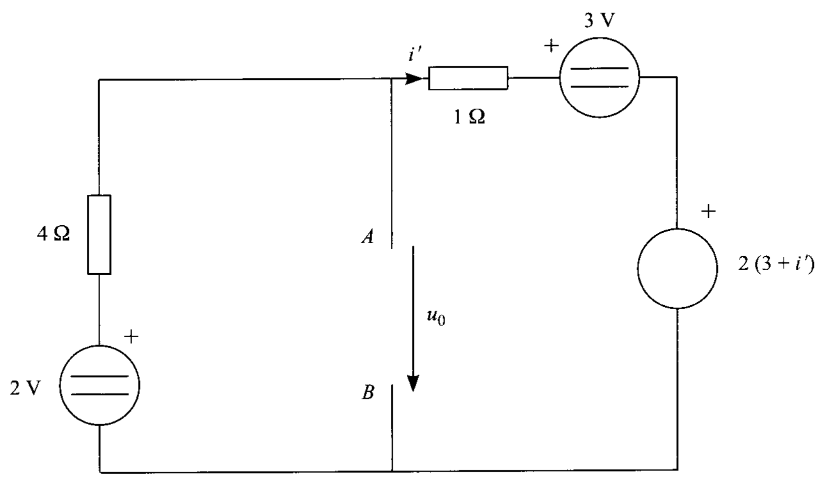
donde se ha realizado un cambio en la expresión de la fuente dependiente, pues la corriente que pasa por la resistencia de 1 Ω en este circuito no es la denominada i en el circuito anterior. La modificación ha realizado la siguiente transformación en las magnitudes:



La corriente i', que es la que circula por la resistencia de 1 Ω en el nuevo circuito, se relaciona con i de la forma $i = 3 + i'$.



Por esta razón la nueva expresión de la fuente dependiente, puesta en función de i', es la que aparece en la figura siguiente, en la que, además, se han agrupado fuentes y resistencias en serie:



En este circuito, la tensión u_o, entre A y B, viene dada por:

$$u_o = 2 - 4 \cdot i'$$

y el valor de i' se puede obtener aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la única malla del circuito:

$$2 - 3 - 2(3 + i') = (4 + 1)i'$$

La corriente i' se despeja de esta ecuación, siendo su valor

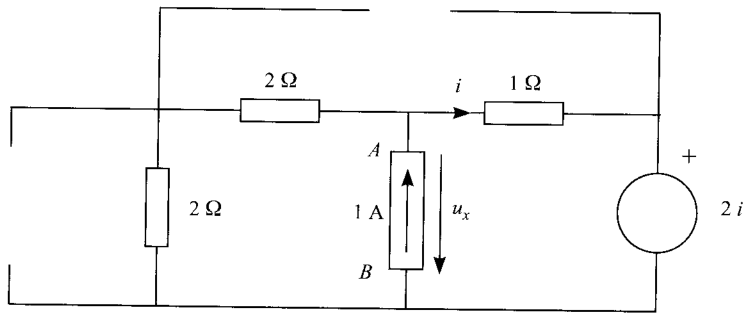
$$i' = -1 \text{ A}$$

por tanto, la tensión u_o valdrá:

$$u_o = 2 + 4 \cdot 1 = 6 \text{ V}$$

Éste será el valor de la fuente del equivalente Thévenin.

En lo que respecta a la resistencia Thévenin, tiene el valor de la tensión u_x en el siguiente circuito:



en el que se han anulado las fuentes independientes, y se ha insertado entre A y B una fuente de 1 A.

Si se aplica la primera ley de Kirchhoff al nudo A se tiene que:

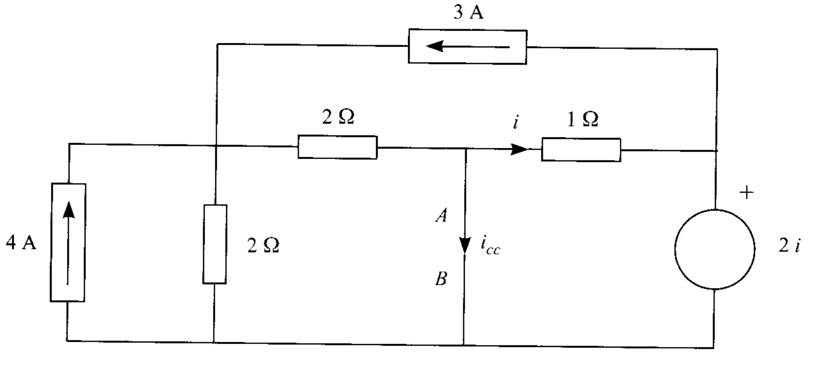
$$1 = \frac{u_x}{4} + i$$

Por otra parte, la corriente i es la que circula por la resistencia de 1 Ω, que se puede escribir como:

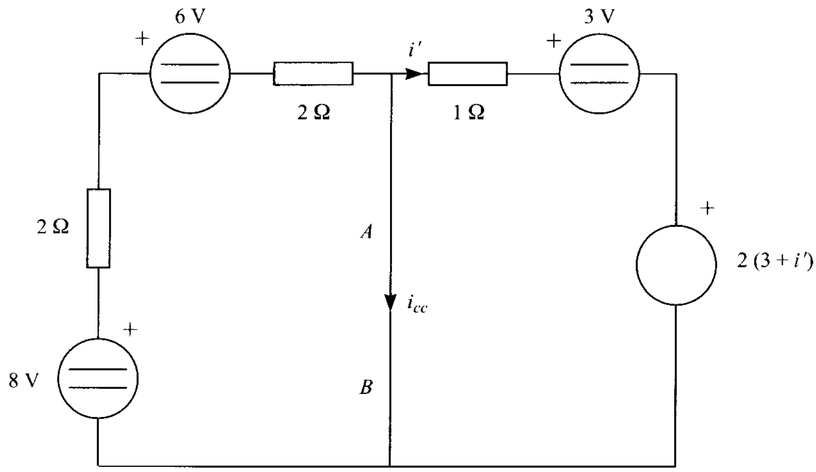
$$i = \frac{u_x - 2i}{1}$$

A partir de ambas ecuaciones, se obtiene el valor de $u_x = 12/7$ V. Por lo tanto, la resistencia Thévenin vale $R_{th} = 12/7\ \Omega$.

Para verificar que estos dos valores son correctos, se obtiene la corriente de cortocircuito entre A y B, para lo que se ha de resolver el siguiente circuito:



Si a este circuito se le aplican las transformaciones realizadas para hallar la tensión a circuito abierto, se llega al siguiente circuito equivalente:



En este circuito se puede obtener i_{cc} como:

$$i_{cc} = (8 - 6)/4 - i'$$

y el valor de i' se obtiene aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla de la derecha:

$$i' = -(3 + 2(3 + i'))/1$$

De aquí se obtiene que $i' = -3$ A, y por tanto, $i_{cc} = 7/2$ A.

La resistencia Thévenin tiene que valer, por tanto,

$$R_{th} = E_{th}/i_{cc} = 6/(7/2) = 12/7 \ \Omega$$

que es el resultado que se ha obtenido calculándola directamente.

Una vez obtenido el equivalente Thévenin, se puede resolver el transitorio. La expresión de la tensión en el condensador será:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

La tensión inicial viene dada en el enunciado y vale 4 V. La constante de tiempo, puesto que se conoce el valor de la resistencia Thévenin, será:

$$\tau = R_{th} \cdot C = (12/7) \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1{,}71 \text{ ms}$$

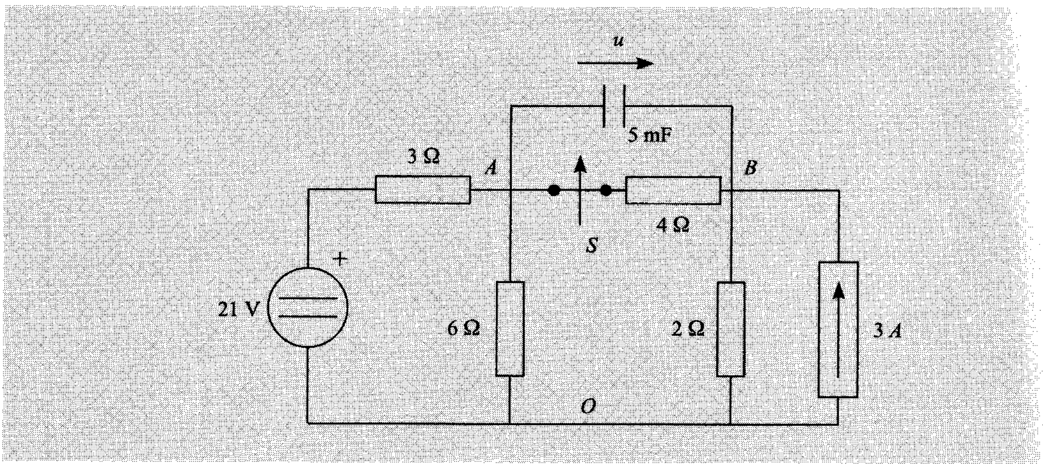
En cuanto a la tensión en régimen permanente, puesto que se trata de un circuito de continua, será la tensión a circuito abierto entre los puntos A y B, esto es, la tensión del equivalente Thévenin, o sea 6 V. Por consiguiente la expresión de la tensión será, sustituyendo valores:

$$u(t) = 6 + (4 - 6)e^{-583{,}33t} = 6 - 2 \cdot e^{-583{,}33t}$$

4.19. En el circuito de la figura, el interruptor S lleva cerrado un tiempo que puede considerarse infinito.

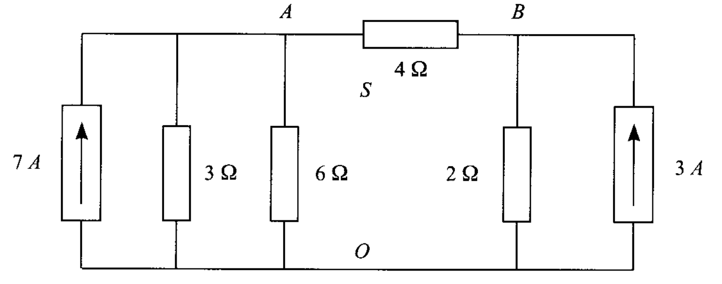
a) Analizar el circuito por nudos tomando como referencia el nudo O. Obtener la tensión en el condensador en estas condiciones.

b) En el instante $t = 0$ se abre el interruptor S. Calcular $u(t)$ para $t \geqslant 0$.



SOLUCIÓN

Puesto que el circuito está en régimen permanente, antes de que se produzca la maniobra el condensador se comporta como un circuito abierto, y por tanto el circuito que hay que analizar por nudos será:



En este circuito se plantean las ecuaciones de análisis por nudos, obteniéndose el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es: $u_A = 12$ V; $u_B = 8$ V.

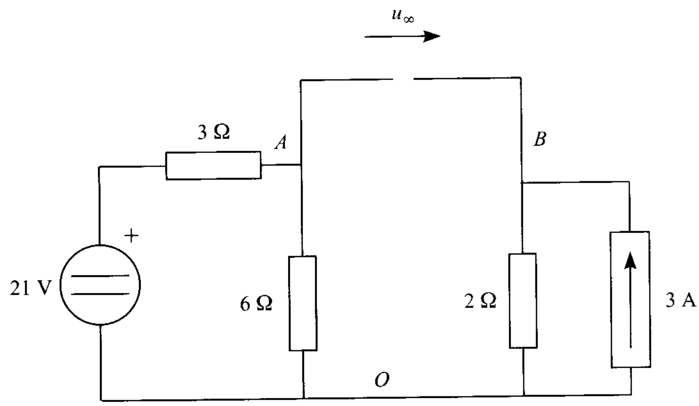
La tensión en el condensador, en función del tiempo, viene dada por la expresión:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

La tensión inicial, que coincidirá con la de la resistencia de 4 Ω antes de que se efectúe la maniobra será la diferencia entre las tensiones de los nudos A y B:

$$u(0) = u_A - u_B = 12 - 8 = 4 \text{ V}$$

La tensión en régimen permanente será la diferencia entre las tensiones en los puntos A y B, pero una vez abierto el interruptor. En tales condiciones, el circuito resultante en régimen permanente será:



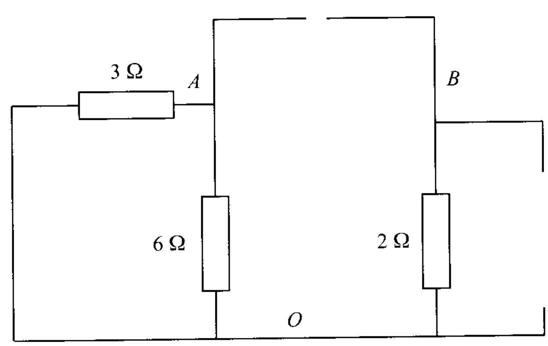
La tensión en el nudo A será, aplicando la regla del divisor de tensión:

$$u_A = 21 \cdot 6/(6 + 3) = 14 \text{ V}$$

y en cuanto a la tensión en B, será $u_B = 3 \cdot 2 = 6$ V.

Por tanto, la tensión en régimen permanente será: $u_\infty = 14 - 6 = 8$ V.

En cuanto a la constante de tiempo, tendrá la expresión $\tau = R_{th} \cdot C$. La resistencia equivalente, será la resistencia equivalente del circuito siguiente:



La resistencia equivalente es la resultante de asociar en serie la resistencia de 2 Ω, y el paralelo de las de 6 Ω y 3 Ω. El valor, por tanto, será de $R_{th} = 4$ Ω.

Por consiguiente, la constante de tiempo será:

$$\tau = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ ms}$$

Y la expresión de la tensión en el condensador, sustituyendo los valores obtenidos será:

$$u(t) = 8 + (4 - 8) \cdot e^{-50t}$$

4.20. Una fuente de tensión real de corriente continua de parámetros E y R es capaz de ceder una potencia máxima de 20 W cuando se conecta entre sus terminales una resistencia.

Si por el contrario se conecta a esta fuente un condensador de 1 mF inicialmente descargado, se necesita un tiempo de 3,4657 ms para que dicho condensador alcance el 25 % de la energía que almacenaría en régimen permanente. Calcúlense los valores de E y R.

SOLUCIÓN

Una fuente real de tensión suministra su potencia máxima cuando se conecta entre sus terminales una resistencia igual a su resistencia interna. En este caso, el valor de la potencia que suministra es:

$$P_{\text{máx}} = \frac{E^2}{4R} = 20$$

Por otra parte, cuando se conecta el condensador, la tensión que aparece entre los terminales de este elemento será:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

La tensión inicial, según el enunciado, es nula, $u(0) = 0$. La constante de tiempo será $\tau = RC$, y la tensión final será la tensión de la fuente ideal, pues en régimen permanente el condensador se comporta en corriente continua como un circuito abierto; por tanto, $u_{\infty} = E$.

La expresión de la tensión en el condensador será, por tanto:

$$u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

La energía almacenada en un condensador viene dada por la expresión:

$$W = \frac{1}{2}Cu^2$$

Cuando el condensador esté completamente cargado, la energía almacenada será:

$$W_{\infty} = \frac{1}{2}CE^2$$

Y para que la energía sea la cuarta parte de este valor, la tensión en el condensador será:

$$u_o = 0{,}5\ \mathrm{E}$$

Esta tensión se produce al cabo de $t_o = 3{,}4657$ ms de haber conectado el condensador, es decir,

$$0{,}5E = E(1 - e^{-3{,}4657/\tau})$$

donde τ está en milisegundos. De aquí se puede obtener el valor de la constante de tiempo como:

$$3{,}4657/\tau = \ln 2$$

$$\tau = \frac{3{,}4657}{\ln 2} = 5 \text{ ms}$$

Puesto que el valor del condensador es de 1 mF, la resistencia valdrá $R = 5\ \Omega$.

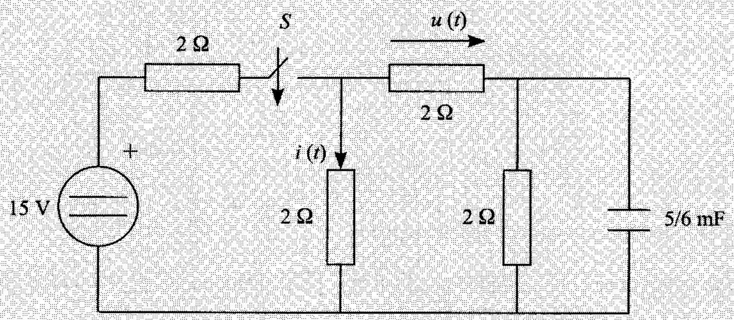
A partir de este resultado, y de la potencia máxima suministrada por la fuente, se obtiene el valor de E.

$$E = \sqrt{20 \cdot 4 \cdot 5} = 20 \text{ V}$$

4.21. En el circuito de la figura, el interruptor S lleva un tiempo infinito abierto. En el instante $t = 0$ (s) se cierra S. Se pide:

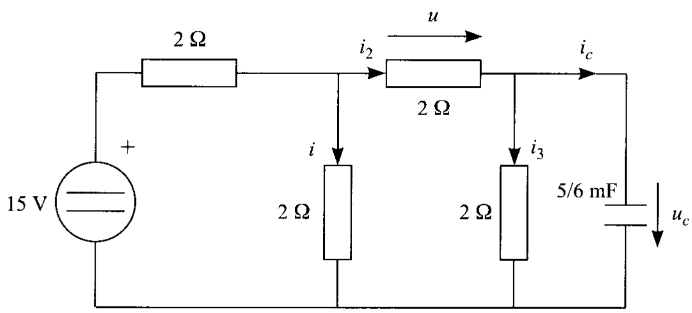
a) Hállense las expresiones de $i(t)$ y $u(t)$.

b) Represéntese gráficamente dichas expresiones.



SOLUCIÓN

La obtención de $u(t)$ e $i(t)$ se hará a partir de la tensión en el condensador, que es la variable de estado del circuito. Para obtener aquéllas en función de ésta, se analizará el siguiente circuito:



En este circuito se pueden establecer las siguientes relaciones:

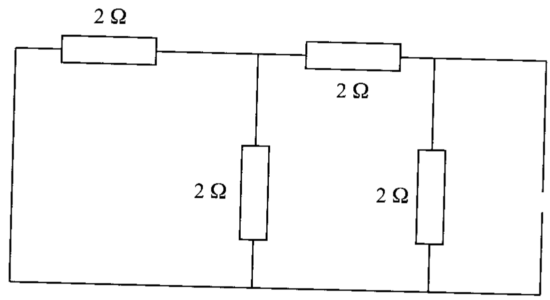
$$u = 2 \cdot i_2 = 2 \cdot (i_3 + i_c) = u_c + 2i_c$$

$$i = (u + u_c)/2 = (u_c + 2i_c + u_c)/2 = u_c + i_c$$

Debe hallarse, por tanto, la tensión u_c, cuya expresión será:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) + [u_c(0) - u_{c\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

La tensión inicial en el condensador es nula, pues éste llevaba un tiempo infinito sin alimentación, por lo que estaba totalmente descargado. La constante de tiempo será $\tau = R_{th} \cdot C$. El valor de R_{th} se obtiene en el siguiente circuito:



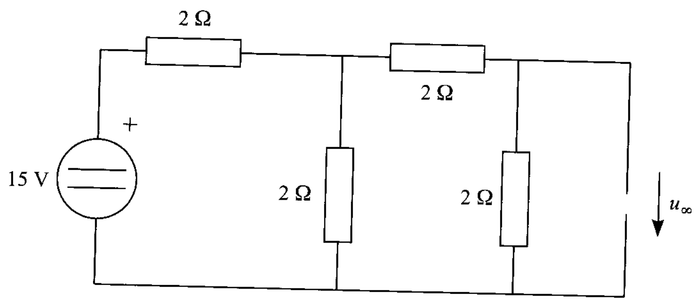
En él se puede obtener R_{th} como:

$$R_{th} = \frac{2\cdot\left(2+\dfrac{2\cdot 2}{2+2}\right)}{2+2+\dfrac{2\cdot 2}{2+2}} = \frac{6}{5}\ \Omega$$

Y por tanto la constante de tiempo es $\tau = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot 10^{-3} = 1$ ms.

La tensión en el condensador, una vez alcanzado el régimen permanente, será:

$$u_\infty = \frac{2}{2+2}\cdot\frac{\dfrac{2(2+2)}{2+(2+2)}}{2+\dfrac{2(2+2)}{2+(2+2)}}\,15 = 3\ \mathrm{V}$$



Por tanto, la tensión el condensador será:

$$u_c(t) = 3 + (0-3)\cdot e^{-1.000t} = 3(1-e^{-1.000t})$$

Y la tensión y la corriente pedidas:

$$u = u_c + 2i_c$$

$$i = u_c + i_c$$

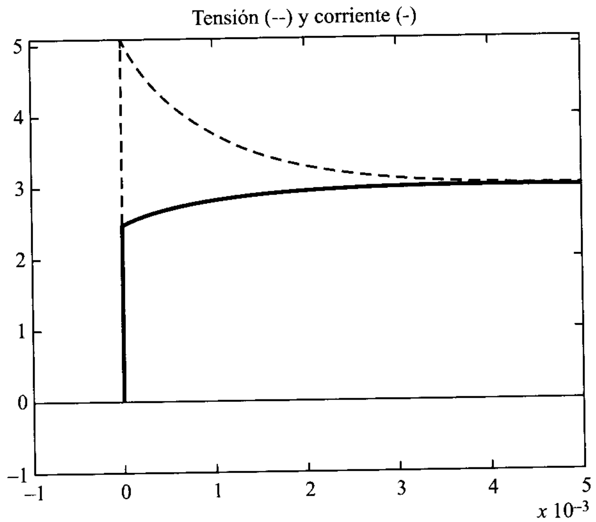
La corriente por el condensador será:

$$i_c(t) = C\,\frac{du_c}{dt} = \frac{5}{2}\,e^{-1.000t}$$

Y finalmente:

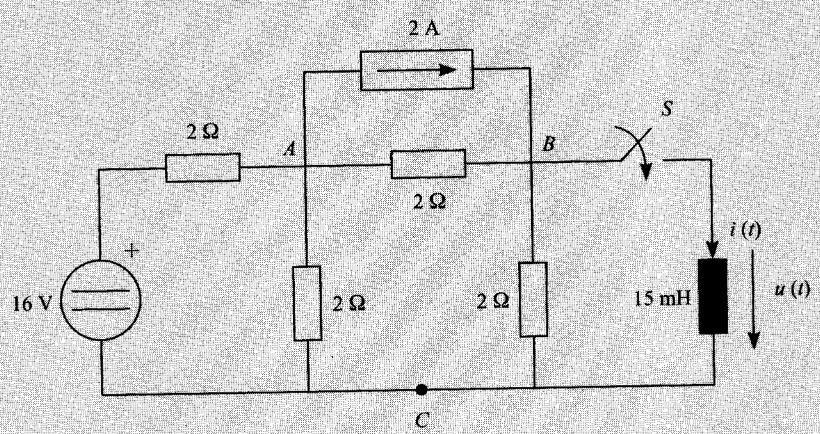
$$u = u_c + 2i_c = 3(1 - e^{-1.000t}) + 2\,\frac{5}{2}\,e^{-1.000t} = 3 + 2 \cdot e^{-1.000t}$$

$$i = u_c + i_c = 3(1 - e^{-1.000t}) + \frac{5}{2}\,e^{-1.000t} = 3 - \frac{1}{2}\,e^{-1.000t}$$



En la figura anterior se muestran las evoluciones de la tensión y de la corriente obtenidas. El salto brusco en $t = 0$ indica que ninguna de las dos magnitudes es variable de estado.

4.22. Sea el circuito de la figura:

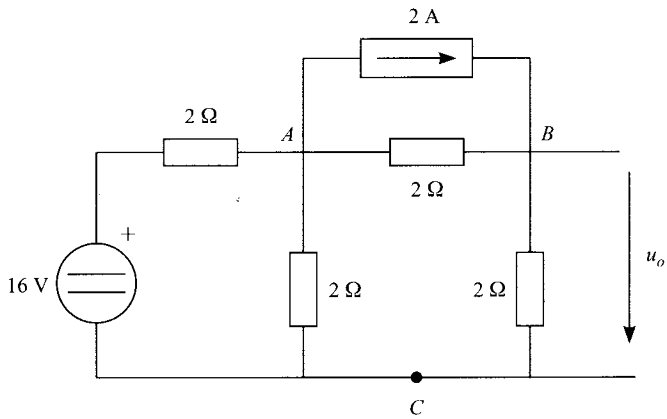


a) Con el interruptor S abierto, obténgase el equivalente Thévenin del circuito desde los terminales BC.

b) En un instante que se considera $t = 0$ se cierra el interruptor S. Hállense las expresiones de la intensidad y tensión en la rama de la bobina para $t \geqslant 0$.

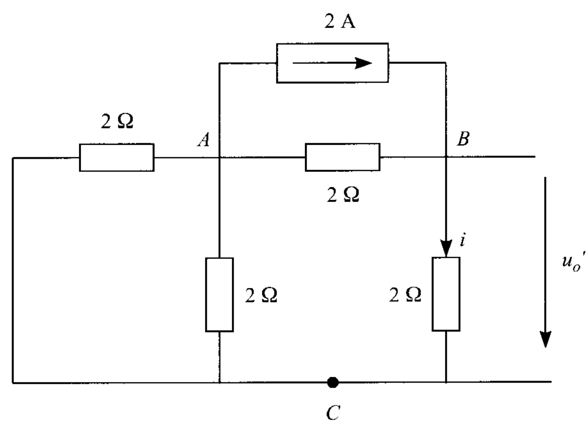
Solución

Para hallar el equivalente Thévenin es necesario obtener la tensión a circuito abierto entre los terminales B y C, tal como se muestra en el circuito siguiente.



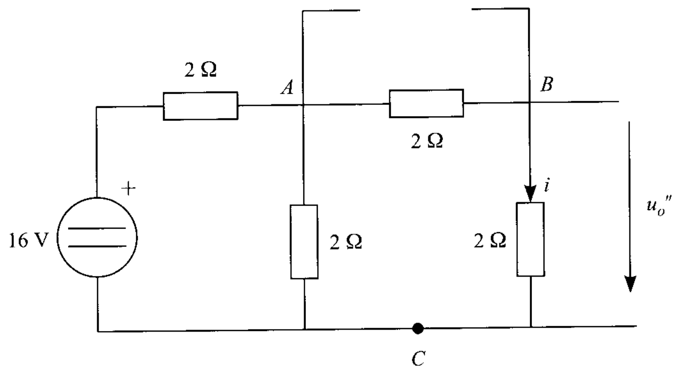
Una forma de obtener esta tensión es empleando el método de superposición. Cuando sólo actúa la fuente de corriente, la tensión entre B y C, u_o', vale:

$$u_o' = 2 \cdot i = 2 \cdot \frac{2}{2 + 2 + \dfrac{2 \cdot 2}{2+2}} \cdot 2 = 1{,}6 \text{ V}$$



Cuando sólo está presente la fuente de tensión, la tensión u_o'' vale:

$$u_o'' = \frac{2}{2+2} \cdot \frac{\dfrac{2(2+2)}{2+(2+2)}}{2 + \dfrac{2(2+2)}{2+(2+2)}} \cdot 16 = 3{,}2 \text{ V}$$

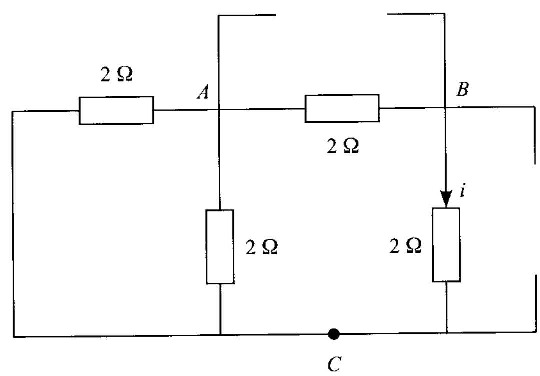


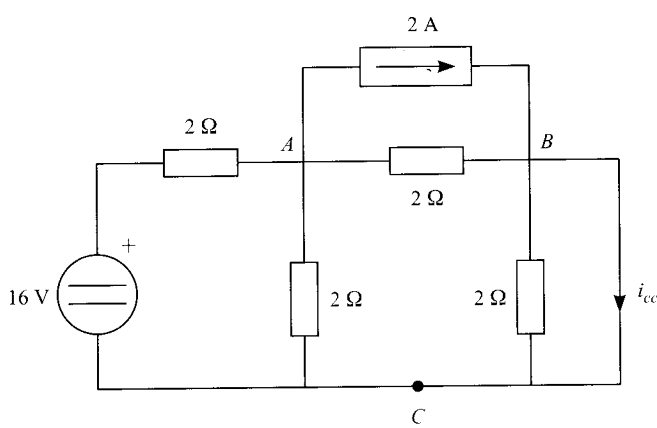
Y por tanto,

$$u_o = u_o' + u_o'' = 1{,}6 + 3{,}2 = 4{,}8 \text{ V}$$

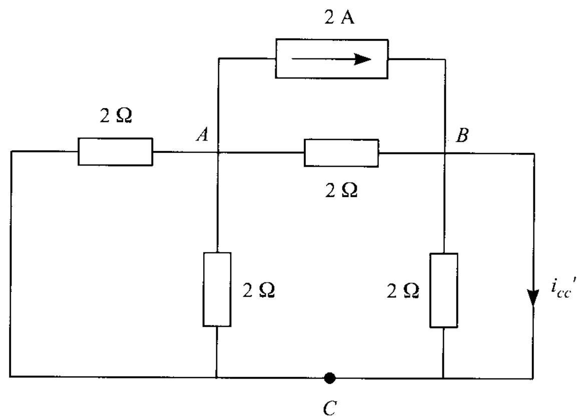
La resistencia Thévenin se obtiene del circuito siguiente, a partir de asociaciones en serie y en paralelo:

$$R_{th} = \frac{2\left(2 + \dfrac{2 \cdot 2}{2 + 2}\right)}{2 + \left(2 + \dfrac{2 \cdot 2}{2 + 2}\right)} = 1{,}2 \ \Omega$$





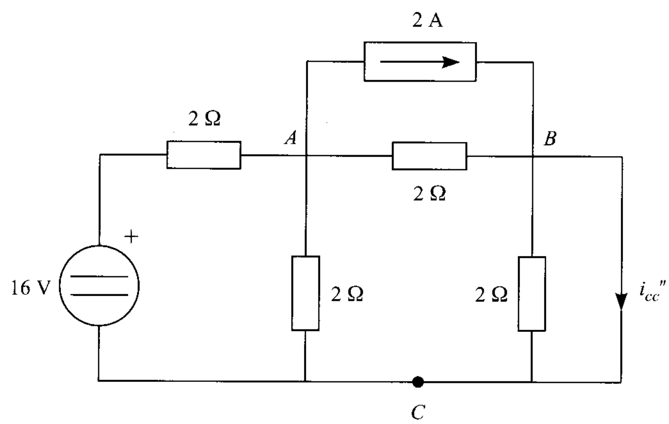
La corriente de cortocircuito se obtendrá también aplicando el método de superposición. Cuando sólo actúa la fuente de corriente se obtiene el circuito siguiente:



en el que la corriente i'_{cc} vale:

$$i'_{cc} = \frac{2}{1+2} \cdot 2 = 1{,}333 \text{ A}$$

Por otra parte, si sólo está activa la fuente de tensión, el circuito resultante sería:



en el que la corriente i''_{cc} vale:

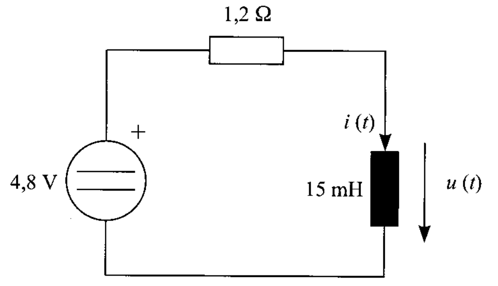
$$i''_{cc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{2 \cdot 2}{2+2}}{2 + \dfrac{2 \cdot 2}{2+2}} \cdot 16 = 2{,}66 \text{ A}$$

Por tanto, la corriente de cortocircuito i_{cc} vale:

$$i_{cc} = 1{,}333 + 2{,}666 = 4 \text{ A}$$

Se verifica que la resistencia Thévenin es el cociente entre la tensión de vacío y la corriente de cortocircuito.

Una vez obtenido el equivalente Thévenin, se obtienen las expresiones de la tensión e intensidad en la bobina, una vez efectuada la maniobra de cierre del interruptor S.



La expresión de la corriente en la bobina será:

$$i(t) = i_{\infty}(t) + [i(0) - i_{\infty}(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

Puesto que la bobina estaba en circuito abierto, la corriente inicial es nula, $i(0) = 0$. La constante de tiempo será $\tau = L/R_{th} = 15 \cdot 10^{-3}/1{,}2 = 12{,}5$ ms.

En cuanto a la corriente en régimen permanente, equivale a la corriente de cortocircuito calculada anteriormente, puesto que una bobina en un circuito de continua, y en régimen permanente, se comporta como un cortocircuito. Por tanto, $i_{\infty} = 4$ A.

Si se sustituyen todos los valores en la expresión de la corriente, se obtiene:

$$i(t) = 4 - 4 \cdot e^{-80t}$$

La tensión se obtiene a partir de la corriente:

$$u = L\frac{di}{dt} = 4{,}8 \cdot e^{-80t}$$

4.23. Una fuente de tensión real de corriente continua puede proporcionar una potencia máxima de 10 W. Por otro lado, si se conecta un condensador de 1 mF a la fuente, la energía que almacena en régimen permanente es de 50 mJ. Obténganse los parámetros de la fuente de tensión real.

Una vez calculados estos parámetros, determinar el tiempo que emplea el condensador en adquirir el 25 % de su energía final, suponiendo que estaba descargado cuando se conectó a la fuente.

SOLUCIÓN

En primer lugar, se van a obtener los parámetros de la fuente. Al tratarse de una fuente real de corriente continua, es necesario conocer los valores de la fuente de tensión ideal y de la resistencia interna en serie con ella.

Respecto al valor de la fuente, se va a utilizar la propiedad de los condensadores que dice que la energía almacenada en un condensador de valor C, cuando hay entre sus terminales una tensión u, es $w = (1/2)Cu^2$. A partir de esta fórmula resulta inmediato determinar el valor de la fuente, cuando se sabe la energía almacenada en régimen permanente, ya que entonces, el condensador estará a una tensión fija e igual a la de la fuente.

Es decir, se puede despejar la tensión de la expresión de la energía, llegándose a:

$$u(t) = \sqrt{\frac{2w}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}} = 10 \text{ V}$$

El valor de la resistencia hay que obtenerlo a partir de la potencia máxima que puede generar la fuente. En el capítulo de continua se puede comprobar que esta potencia es, para una fuente de valor e_g, y de resistencia R_g:

$$p_{\text{máx}} = \frac{e_g^2}{4R_g} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}}$$

Por tanto, se puede obtener el valor de R_g a partir de los datos del enunciado:

$$R_g = \frac{e_g^2}{4p_{\text{máx}}} = \frac{100}{4 \cdot 10} = 2{,}5\ \Omega$$

Una vez obtenidos los parámetros de la fuente real de tensión, se resuelve el transitorio. La tensión en el condensador tendrá la expresión general:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

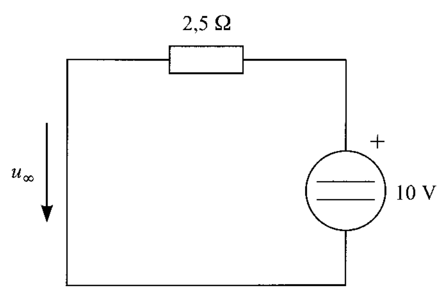
La constante de tiempo del circuito, puesto que la resistencia Thévenin coincide con la resistencia de la fuente de tensión real, será:

$$\tau = R_g \cdot C = 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \text{ ms}$$

Y dado que el condensador está desconectado en el momento de la conexión, la tensión inicial es nula:

$$u(0) = 0$$

La tensión en régimen permanente coincidirá con la tensión de la fuente, puesto que el condensador se comportará como un circuito abierto una vez transcurrido un tiempo infinito desde la conexión:



Por tanto, $u_\infty = 10$ V. La expresión de la tensión en el condensador, a partir del momento de la conexión, será:

$$u(t) = 10 \cdot (1 - e^{-t/-0{,}0025})$$

La tensión llegará a 5 V en el instante t_o, donde t_o se obtiene de la expresión:

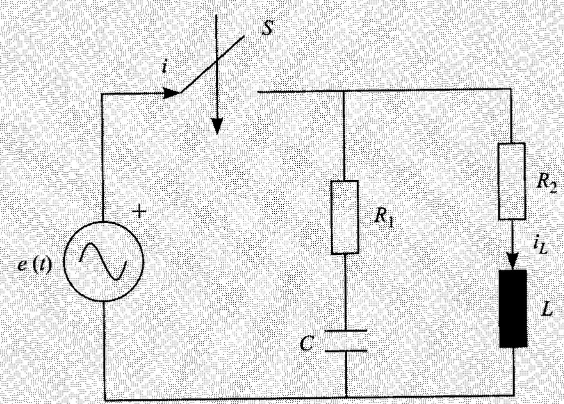
$$5 = 10 \cdot (1 - e^{-t_o/0{,}0025})$$

Por tanto:

$$t_o = -2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \ln(1/2) = 1{,}73 \text{ ms}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

4.1. En el circuito de la figura, el interruptor S se cierra en $t = 0$. Tanto la bobina como el condensador están inicialmente descargados.



1. Calcúlense las expresiones de la tensión u_C y de la corriente i_L para $t \geqslant 0$.
2. Calcúlese, aplicando el principio de superposición, la corriente i para $t \geqslant 0$.

Datos: $e(t) = 20 \cos(100\pi t + \pi/5)$ V; $L = 2$ mH; $C = 5$ μF; $R_1 = 500$ Ω; $R_2 = 100$ Ω.

Nota: el circuito está formado por dos circuitos de primer orden independientes.

SOLUCIÓN

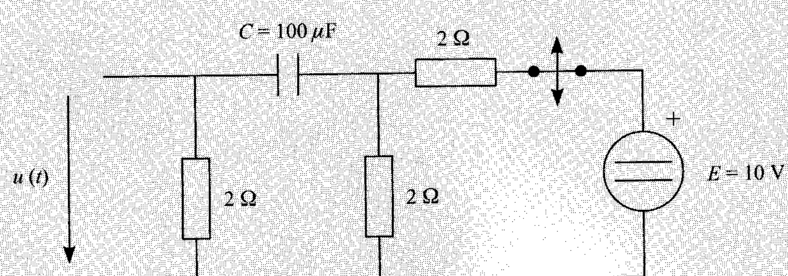
1. $u_C = 15{,}73 \cos(100\pi t - 8{,}15 \cdot \pi/180) - 15{,}57 \cdot e^{-400t}$;

   $i_L = 0{,}2 \cos(100\pi t + 29{,}64 \cdot \pi/180) - 0{,}174 e^{-50.000t}$.

2. $i(t) = 0{,}2 \cos(100\pi t + 29{,}64 \cdot \pi/180) -$

   $- 0{,}174 e^{-50.000t} - 0{,}0247 \operatorname{sen}(100\pi t - 81{,}5 \cdot \pi/180) + 0{,}03114 \cdot e^{-400t}$.

4.2. En el circuito de la figura, el interruptor se abre y se cierra sucesivamente, estando 10 ms en cada una de las posiciones. Determínese la expresión de la tensión $u(t)$. El condensador está inicialmente descargado.



Nota: se considera que se ha llegado al régimen permanente después de transcurrido un tiempo superior a 5 constantes de tiempo.

SOLUCIÓN

$0 \leqslant t \leqslant 10$ ms $\qquad u(t) = 3{,}333 \cdot e^{-3333t}$

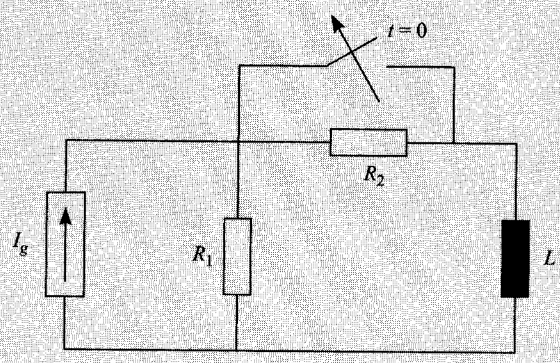
$10 \leqslant t \leqslant 20$ ms $\qquad u(t) = 2{,}5 \cdot e^{-2.500(t-0{,}01)}$

$20 \leqslant t \leqslant 30$ ms $\qquad u(t) = 3{,}333 \cdot e^{-3333(t-0{,}02)}$

4.3. El interruptor del circuito que se muestra en la figura, ha estado cerrado durante un tiempo que puede considerarse infinito. I_g es una fuente de corriente continua. Este interruptor se abre en $t = 0$, y permanece permanentemente abierto. Para $t > 0$:

1. Determínese la intensidad que circula por la bobina y la tensión en la resistencia R_2, en función de I_g, R_1, R_2 y L.

2. Determínese la relación R/R_2 para que la relación entre la tensión en la resistencia R_2 en $t = 0$ y la tensión en régimen permanente sea de 1,5.



SOLUCIÓN

1. $i_L(t) = I_g(1 - R_1/(R_1 + R_2))e^{-t/\tau} + I_gR_1/(R_1 + R)$.

2. $R = 2 \cdot R_2$.

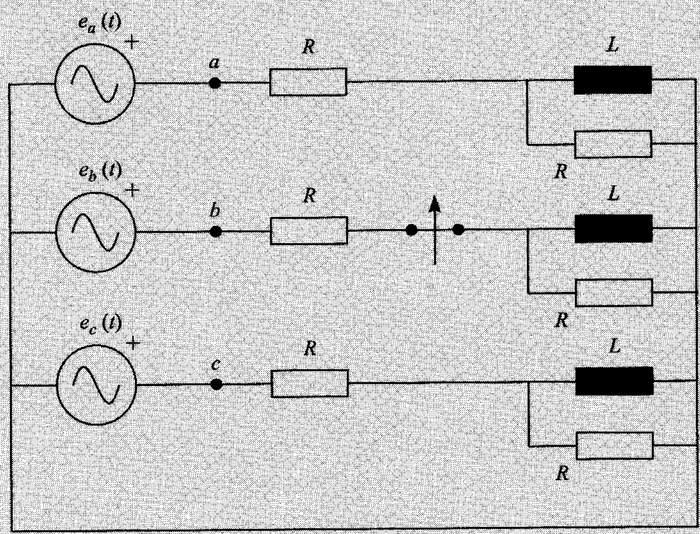
4.4. En el circuito de la figura, las tensiones de las fuentes valen:

$$e_a(t) = 100 \cos 100t$$

$$e_b(t) = 100 \cos (100t - 2\pi/3)$$

$$e_c(t) = 100 \cos (100t + 2\pi/3)$$

El interruptor S lleva cerrado un tiempo que se puede considerar infinito. En el instante $t = 0$ se abre. Calcúlese la corriente circulante por las bobinas antes y después de la maniobra de interruptor.



Datos: $R = 10\ \Omega$; $L = 100$ mH.

SOLUCIÓN

Antes de la maniobra:

$$i_{La}(t) = 4{,}472 \cos(\omega t - 63{,}43 \cdot \pi/180)\ \text{A}$$

$$i_{Lb}(t) = 4{,}472 \cos(\omega t - 183{,}43 \cdot \pi/180)\ \text{A}$$

$$i_{Lc}(t) = 4{,}472 \cos(\omega t + 56{,}57 \cdot \pi/180)\ \text{A}$$

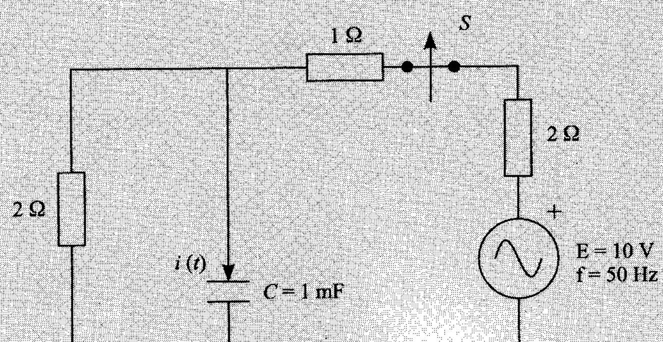
Después de la maniobra:

$$i_{La}(t) = 4{,}472 \cos(\omega t - 63{,}43 \cdot \pi/180)\ \text{A}$$

$$i_{Lb}(t) = -4{,}46 \cdot e^{-100t}\ \text{A}$$

$$i_{Lc}(t) = 4{,}472 \cos(\omega t + 56{,}57 \cdot \pi/180)\ \text{A}$$

4.5. En el circuito de la figura, el interruptor se abre cuando la tensión en la fuente pasa por un máximo. Calcúlese la corriente que circula por el condensador una vez abierto el interruptor *S*.

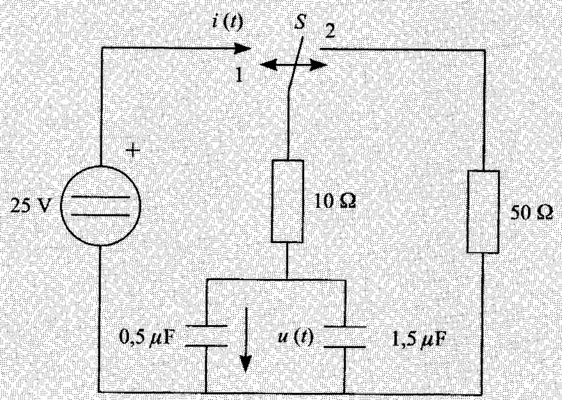


Nota: en la figura, el valor de *E* representa el valor eficaz de la tensión en la fuente.

SOLUCIÓN

$$i(t) = -54{,}47 \cdot e^{-500t}$$

4.6. El interruptor del circuito de la figura, se conecta al punto 1 en $t = 0$, y en $t = 3\tau$ pasa a conectarse al punto 2. Calcúlese la tensión en los condensadores y la corriente que suministra la fuente desde el instante $t = 0$ hasta que el circuito esté definitivamente en régimen permanente.



Nota: los condensadores se encuentran inicialmente descargados.

SOLUCIÓN

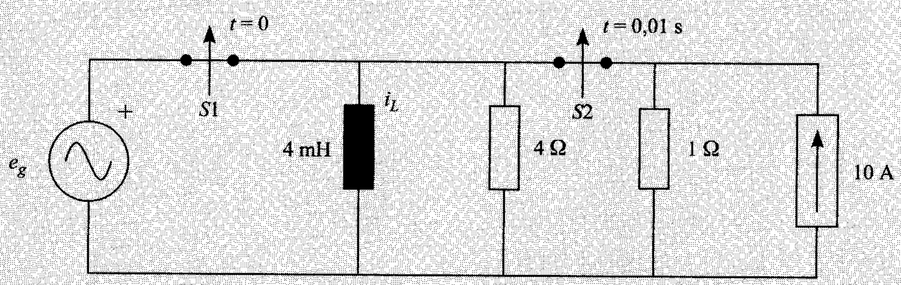
$0 \leqslant t \leqslant 3$ ms $\quad u(t) = 20 \cdot (1 - e^{-10.000t})$

$\quad i(t) = 0{,}5 \cdot e^{-10.000t}$

$0{,}3$ ms $\leqslant t < \infty \quad u(t) = 23{,}755 \cdot e^{-5.000(t-0{,}0003)}$

$\quad i(t) = 0$

4.7. Los interruptores ideales S_1 y S_2 del circuito de la figura llevan cerrados un tiempo infinito. En el instante $t = 0$ se abre S_1, permaneciendo en dicha posición a partir de entonces, y en el instante $t = 0{,}01$ s, se abre S_2 y permanece definitivamente en esa posición. Obténgase la expresión matemática de la intensidad $i_L(t)$ en la bobina para $t < 0$.



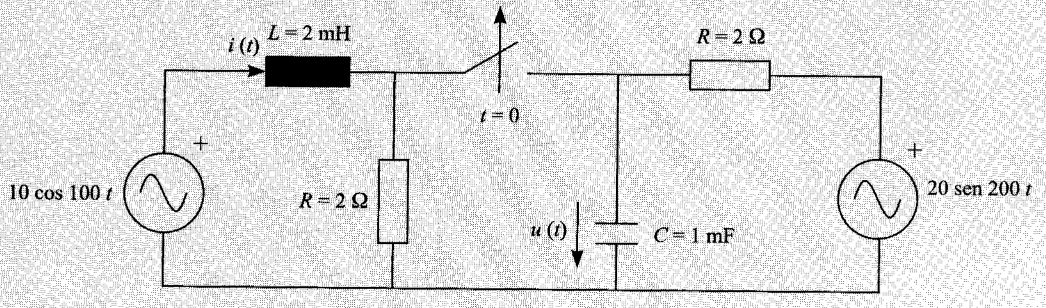
$e_g = 32 \cos(400\,t + \pi / 4)$

SOLUCIÓN

$0 \leqslant t < 10$ ms $\quad i_L(t) = 10 + 14{,}142 \cdot e^{-200t}$

10 ms $\leqslant t < \infty \quad i_L(t) = 11{,}91 \cdot e^{-1.000(t-0{,}01)}$

4.8. En el circuito de la figura, el interruptor lleva un tiempo infinito cerrado. Se produce una maniobra de apertura en $t = 0$, y permanece en esta posición definitivamente. Determínese el valor de $i(t)$ y de $u(t)$ antes y después de la maniobra.

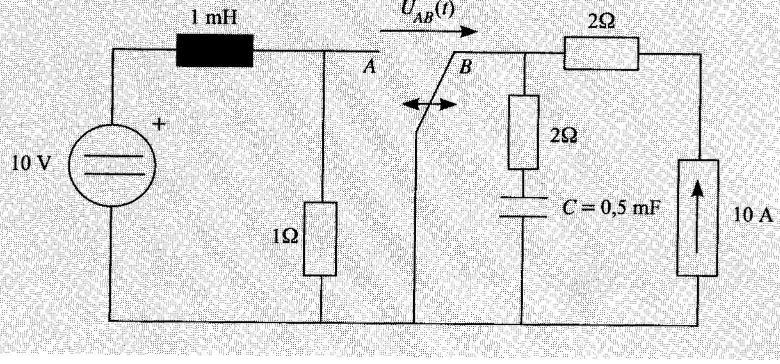


SOLUCIÓN

$$i(t) = 4{,}975 \cdot \cos(100t - 5{,}71\pi/180) + 9{,}025 \cdot e^{-1.000t}$$

$$u(t) = 18{,}57 \cdot \operatorname{sen}(200t - 21{,}8\pi/180) + 20{,}34 \cdot e^{-500t}$$

4.9. En el circuito de la figura, el interruptor S lleva conectado en B un tiempo infinito. En $t = 0$ se conmuta a A, y en $t = 10$ ms vuelve a B, y permanece en esta posición definitivamente. Determínese las expresiones de la corriente circulante por la bobina, la tensión en el condensador, y $u_{AB}(t)$ para $t \geqslant 0$.



SOLUCIÓN

$0 \leqslant t < 0{,}01$ $\qquad u_C(t) = 20.000t$

$\qquad i_L(t) = 10 + 10^4 t$

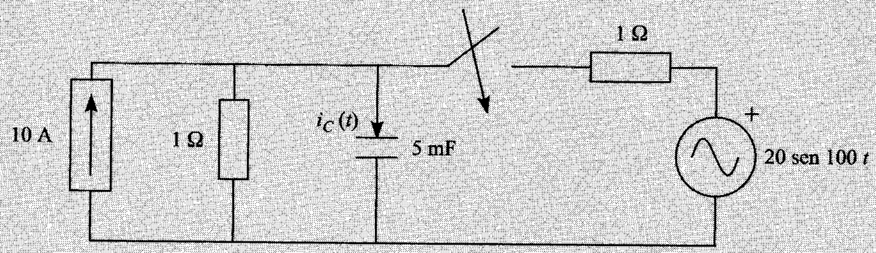
$0{,}01 \leqslant t < \infty$ $\qquad u_C(t) = 200 \cdot e^{-1.000(t-0{,}01)}$

$\qquad i_L(t) = 10 + 100 \cdot e^{-1.000(t-0{,}01)}$

$0 \leqslant t < 0{,}01$ $\qquad u_{AB}(t) = -(20 + 20.000t)$

$0{,}01 \leqslant t < \infty$ $\qquad u_{AB}(t) = 10 + 100 \cdot e^{-1.000(t-0{,}01)}$

4.10. En el circuito de la figura, la fuente de corriente es de corriente continua, y el interruptor lleva abierto un tiempo infinito, y se cierra en $t = 0$. Determínese la expresión de $i_C(t)$ para $t \geqslant 0$.



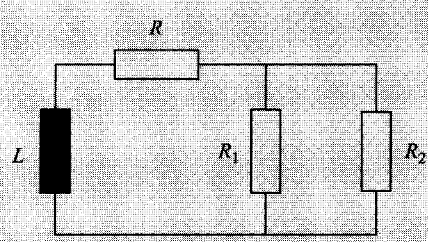
SOLUCIÓN

$$i_C(t) = 48{,}505 \cdot \cos(100t - 14{,}03\pi/180) - 5{,}296 \cdot e^{400t}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

4.1. Calcúlese la constante de tiempo del circuito de la figura.

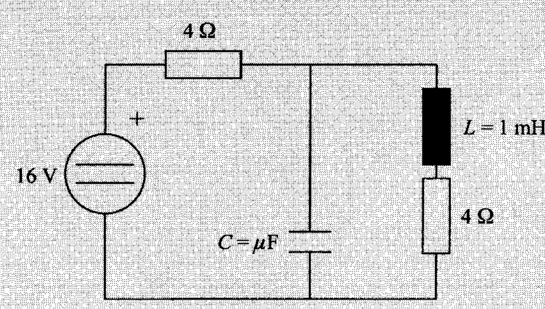
Datos: $L = 1$ mH, $R = 1\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$.



SOLUCIÓN

$$0{,}5 \text{ ms}$$

4.2. Calcúlese la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente grande como para que se haya llegado al régimen permanente.



SOLUCIÓN

$$i_L = 2 \text{ A};\ u_C = 8 \text{ V}$$

4.3. Una bobina ideal de 4 mH inicialmente descargada se conecta a una fuente de tensión continua de 4 V. Determínese el tiempo que tardará la bobina en adquirir una energía de 8 mJ.

SOLUCIÓN

$$t = 2 \text{ ms}$$

4.4. Un condensador de 10 μF se conecta en $t = 0$ a una fuente ideal de tensión cuyo valor en función del tiempo es $e(t) = 2t$ (V). Determínese la expresión de la corriente en el condensador para $0 \leqslant t \leqslant 1$ ms:

SOLUCIÓN

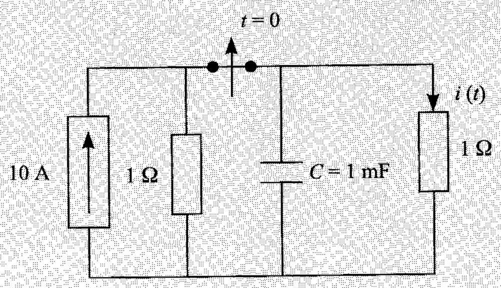
$$i(t) = 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

4.5. Una bobina de 10 mH inicialmente descargada, cuya resistencia es de 2 Ω se conecta a una fuente de tensión continua de 10 V. Determínese el tiempo que tarda la bobina en almacenar una energía de 50 mJ.

SOLUCIÓN

$$t = 5 \text{ ms}$$

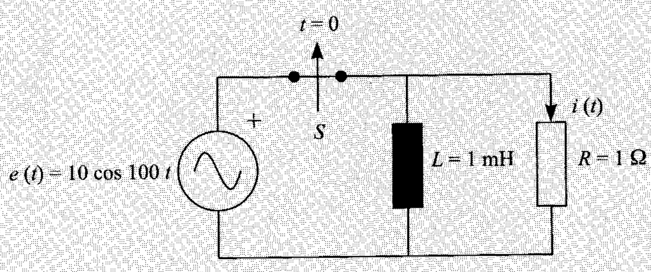
4.6. Obténgase la expresión de $i(t)$ en el circuito de la figura para $t > 0$. El interruptor ha estado cerrado un tiempo infinito, y en $t = 0$ se abre, permaneciendo en esta posición definitivamente.



SOLUCIÓN

$$i(t) = 5 \cdot e^{-333{,}33t}$$

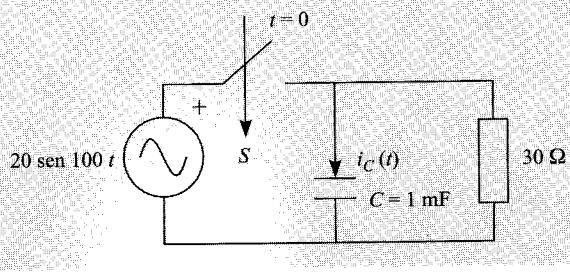
4.7. En el circuito de la figura, obténgase el valor de $i(t)$ para $t > 0$. El interruptor ha estado cerrado un tiempo infinito, y en $t = 0$ se abre, permaneciendo en esta posición definitivamente.



SOLUCIÓN

$$i(t) = 0$$

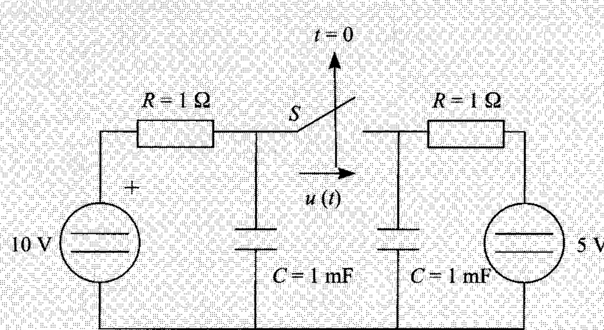
4.8. En el circuito de la figura, el interruptor lleva abierto un tiempo infinito, y se cierra para $t = 0$. Determínese la corriente $i_c(t)$.



SOLUCIÓN

$$i_C(t) = 2 \cdot \text{sen}\,(100t + \pi/2)$$

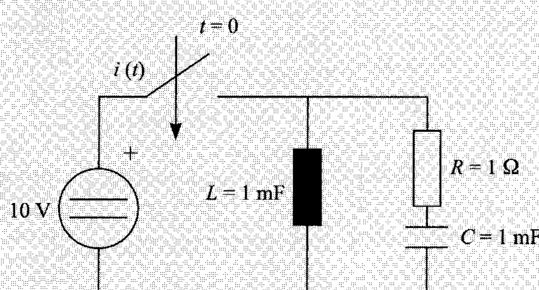
4.9. El interruptor S lleva abierto un tiempo infinito y se abre en $t = 0$. Determínese el valor de la tensión $u(t)$ 1 ms después de la maniobra.



SOLUCIÓN

$$u = 3{,}16 \text{ V}$$

4.10. En el circuito de la figura, el interruptor se cierra en $t = 0$, y permanece en esta posición definitivamente. Obténgase la expresión de la corriente para $t \geqslant 0$. Los elementos están inicialmente descargados.



SOLUCIÓN

$$i(t) = 10^4 t + 10 \cdot e^{1.000t}$$

UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

APÉNDICE

UNIDADES BÁSICAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

El Sistema Internacional de Unidades, SI, adoptado en la XI Conferencia Internacional de Pesos y Medidas en 1960, está constituido por siete unidades básicas que son las de la Tabla 1.

Tabla 1. Unidades básicas del Sistema Internacional (SI)

Magnitud física	Nombre de la unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de materia	mol	mol
Intensidad de corriente	amperio	A
Intensidad de luz	candela	Cd

UNIDADES DERIVADAS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL

En el Sistema Internacional las magnitudes físicas se expresan mediante combinaciones apropiadas de las unidades básicas de la Tabla 1. Las más frecuentes son las de la Tabla 2.

Tabla 2. Algunas unidades derivadas del SI.

Magnitud física	Nombre	Símbolo	Definición
Fuerza	newton	N	$\mathrm{Kg\ m\ s^{-2}}$
Presión	pascal	Pa	$\mathrm{N/m^2}$
Energía	julio	J	$\mathrm{Kg\ m^2/s^2}$
Potencia	vatio	W	J/s
Carga eléctrica	culombio	C	A s
Diferencia de potencial (o tensión)	voltio	V	J/C
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	V/A
Frecuencia	herzio	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$

UNIDADES ELECTROMAGNÉTICAS

Las magnitudes que se utilizan con más frecuencia en electricidad, junto con sus unidades y símbolo en el Sistema Internacional, se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Unidades electromagnéticas del SI

Nombre	Nombre	Símbolo
Carga eléctrica	culombio	C
Intensidad de corriente (o corriente)	amperio	A
Diferencia de potencial (o tensión)	voltio	V
Fuerza electromotriz	voltio	V
Potencia	vatio	W
Energía	julio	J
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω
Capacidad eléctrica	faradio	F
Inductancia eléctrica	henrio	H
Flujo magnético	weber	Wb
Inducción magnética	tesla	T

PREFIJOS UTILIZADOS CON UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

Las potencias y fracciones de las unidades del Sistema Internacional se designan usando los prefijos de la Tabla 4.

Tabla 4. Prefijos de las fracciones y múltiplos del SI

Fracción	Prefijo	Símbolo	Múltiplo	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d	10^{-1}	deca	da
10^{-2}	centi	c	10^{2}	hecto	h
10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	k
10^{-6}	micro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P

ÍNDICE ANALÍTICO

I

L

M

N

P

R

S

T

V

BIBLIOGRAFÍA

PARRA PRIETO V. M., ORTEGA JIMÉNEZ J., PASTOR GUTIÉRREZ A., PÉREZ COYTO A., *Teoría de Circuitos* UNED.

FRAILE MORA J., *Electromagnetismo y circuitos eléctricos*. Servicio de publicaciones. E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Madrid, 1990.

NILSSON J. W., *Circuitos eléctricos*. Addison Wesley Iberoamericana. Wilmington, 1995.

JOHNSON D. E., HILBURN J. L., JOHNSON J. R., *Análisis básico de circuitos eléctricos*. Prentice Hall Hispanoamericana. Mexico, 1991.

GONZÁLEZ ESTÉVEZ E., GARRIDO SUÁREZ C., CIDRÁS PIDRE J., *Ejercicios resueltos de circuitos eléctricos*. Tórculo Edicións. Vigo, 1999.

EDMINISTER J. A., NAHVI M., *Circuitos eléctricos* 3.ª *ed.* McGrawhill. Madrid, 1997.

SALCEDO CARRETERO J. M., LÓPEZ GALÁN J., *Análisis de circuitos eléctricos lineales. Problemas resueltos*. Addison Wesley Iberoamericana. Wilmington, 1995.

CARLSON A. B., *Teoría de circuitos*. Thomson. Madrid, 2002.

Circuitos Eléctricos

Problemas y ejercicios resueltos

Este libro de la colección PRENTICE PRÁCTICA es un complemento ideal para manejar con soltura los conceptos de Teoría de Circuitos. La extensión de los problemas y el nivel de los mismos están adecuados a una asignatura introductoria aunque es necesario que el lector tenga conocimientos de álgebra y cálculo, y que esté familiarizado con operaciones de números complejos.
Cada uno de los capítulos consta de:

- Introducciones teóricas, que incluyen conceptos fundamentales, y que tienen por objeto servir de consulta fácil y de recordatorio en la resolución de los problemas, así como establecer la notación que se empleará a lo largo del capítulo.
- Problemas resueltos en detalle con abundantes gráficos.
- Problemas propuestos sin solución desarrollada para que el lector interesado los resuelva, aunque se incluyen los resultados numéricos para que pueda comprobarse la solución obtenida.

Circuitos Eléctricos
Problemas y ejercicios resueltos

PRENTICE PRACTICA

www.prenticepractica.com

PRENTICE PRACTICA es una colección de libros, cuyo texto es eminentemente práctico. La finalidad de esta colección es permitir al alumno comprender y afianzar la asimilación de la teoría a través de diversos ejercicios y ejemplos.

PRENTICE PRACTICA es una colección amena, de carácter muy didáctico y que, de una forma sencilla, consigue que el alumno obtenga un perfecto manejo práctico de la asignatura.

PRENTICE PRACTICA está dirigida al alumno para conseguir su autoaprendizaje en la materia. La colección es una de las más actualizadas del mercado.

ISBN 84-205-3535-4
9 788420 535357

Pearson Educación

www.pearsoneducacion.com